

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS  
Y EMPRESARIALES**

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras



**ENTROPÍA RELATIVA Y RIESGO DE  
MODELO EN DERIVADOS DE RENTA  
VARIABLE**

Yue Fernández Boyero

Bajo la dirección del doctor

Daniel Arrieta Rodríguez

Curso 2018/2019

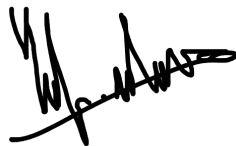
## DECLARACIÓN DE NO PLAGIO

Yo, Yue Fernández Boyero, con NIF 05450484-J, estudiante de Máster en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid durante los cursos 2017-2019, como autora del trabajo de fin de máster titulado “Entropía Relativa y Riesgo de Modelo en Derivados de Renta Variable”, dirigido por el Dr. Daniel Arrieta Rodríguez,

DECLARO QUE el trabajo de fin de máster que presento ha sido elaborado por mí y es original. No copio, ni utilizo ideas, formulaciones, citas integrales o ilustraciones de ninguna obra, artículo, memoria o documento (en versión impresa o electrónica), sin mencionar de forma clara y estricta su origen, tanto en el cuerpo del texto como en la bibliografía. Asimismo declaro que los datos son veraces y que no he hecho uso de información no autorizada de ninguna fuente escrita, de otra persona o de cualquier otra fuente. De igual manera, soy plenamente consciente de que el hecho de no respetar estos extremos es objeto de sanciones universitarias y/o de otro orden.

En Madrid, a 15 de septiembre de 2019.

Fdo.:

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Yue Fernández Boyero', written over a horizontal line.

# Agradecimientos

En primer lugar, agradezco al Doctor D. Daniel Arrieta Rodríguez la orientación y ayuda ofrecidas a lo largo del desarrollo de todo este Trabajo de Fin de Máster. Sin sus ideas y explicaciones no habría sido posible ni tan siquiera empezar a escribir.

También quiero dar las gracias a mi profesor de Matemáticas de los Derivados Financieros Doctor D. Roberto Ferreiro Pérez por haber logrado acrecentar mi interés por el tema y haberme brindado las herramientas teóricas necesarias para abordarlo.

En la lista de agradecimientos debo incluir a mis padres por su apoyo constante durante todos estos años de estudio. Especialmente a mi padre por haber sabido transmitirme el amor por las Matemáticas.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>6</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1. Teoría de Valoración</b>	<b>9</b>
1.1. Carteras Réplica . . . . .	10
1.2. Enfoque por Martingala . . . . .	17
1.3. Feynman-Kac . . . . .	22
<b>2. Derivados de Renta Variable</b>	<b>25</b>
2.1. Opciones Vainilla . . . . .	26
2.2. Opciones Exóticas . . . . .	28
2.3. Futuros . . . . .	28
2.4. Valoración por Black-Scholes . . . . .	29
<b>3. Riesgo de Modelo en Derivados de Renta Variable</b>	<b>32</b>
3.1. Riesgo de Modelo . . . . .	32
3.2. Volatilidad implícita . . . . .	33
3.3. Limitaciones del Modelo de Black-Scholes . . . . .	34
3.4. Ejemplo de Riesgo de Modelo . . . . .	37
<b>4. Entropía Relativa Mínima</b>	<b>41</b>
4.1. Entropía y Entropía Relativa . . . . .	42
4.2. Principio de Máxima Entropía . . . . .	43
4.3. Distribuciones de Entropía Relativa Mínima (ERM) . . . . .	47
<b>5. Montecarlo Ponderado</b>	<b>52</b>
5.1. Método de Montecarlo . . . . .	52
5.2. Método de Montecarlo Ponderado . . . . .	53

<b>6. Aplicación Práctica: cuantificación del riesgo de modelo</b>	<b>55</b>
6.1. Escenarios Reales . . . . .	57
6.2. Escenarios Ficticios . . . . .	60
6.3. Cuantificación del riesgo . . . . .	62
6.4. Conclusiones . . . . .	65
<b>A. Código Python</b>	<b>66</b>
<b>B. Ejecución de la aplicación práctica</b>	<b>73</b>
B.1. Índice DJ EURO STOXX 50 . . . . .	73
B.2. Código de la aplicación práctica . . . . .	74
B.2.1. Notación de los elementos . . . . .	77
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>

# Índice de cuadros

1.1. Equivalencia metodológica . . . . .	24
2.1. Clasificación según el valor intrínseco . . . . .	26
2.2. Gráfica de una opción <i>call</i> . . . . .	26
2.3. Gráfica de una opción <i>put</i> . . . . .	27
3.1. Distribución del subyacente . . . . .	35
3.2. Sonrisa de volatilidad . . . . .	35
3.3. Superficie de volatilidad . . . . .	36
3.4. Gráfica de una opción digital unitaria . . . . .	37
3.5. Réplica de una opción digital . . . . .	38
5.1. Esquema de la metodología WMC . . . . .	53
6.1. Datos para la valoración en $t = 0$ . . . . .	55
6.2. Instrumentos de referencia . . . . .	56
6.3. Escenario 0 . . . . .	57
6.4. Valoración por MBS . . . . .	57
6.5. Escenario 1 . . . . .	58
6.6. Escenario 2 . . . . .	59
6.7. Escenario 3 . . . . .	59
6.8. Escenario 4 . . . . .	60
6.9. Escenario 5 . . . . .	61
6.10. Escenario 6 . . . . .	61
6.11. Valoraciones de la cartera de referencia . . . . .	62
6.12. Diferencias absolutas entre valoraciones . . . . .	62
6.13. <i>Smile</i> escenario 1 vs. <i>smile</i> escenario 4 . . . . .	64
6.14. <i>Smile</i> escenario 4 vs. <i>smile</i> escenario 6 . . . . .	64
B.1. Precio de mercado de opciones europeas . . . . .	73

# Resumen

El objetivo último de este Trabajo de Fin de Máster es mostrar la potencia teórica del concepto de entropía relativa a la hora de resolver los problemas de valoración de derivados de renta variable.

Partiendo del Método de Black-Scholes, se ofrecen dos enfoques de valoración: el enfoque por carteras réplica y el enfoque por martingalas. Ambos convergen en el mismo resultado teórico.

La realidad es que existe una relación empíricamente constatable en el mercado entre los precios de ejercicio y las volatilidades implícitas de las opciones. El Método de Black-Scholes no tiene en cuenta esta relación. Como se verá a lo largo del trabajo, Black-Scholes presenta ciertas limitaciones a la hora de valorar correctamente una opción. Por este motivo se introduce el tema del riesgo de modelo, que en este ensayo será aquél derivado de un mercado incompleto, esto es, el derivado de valorar una misma opción utilizando diferentes medidas de probabilidad.

Algunas de las limitaciones de Black-Scholes son resueltas mediante otro método denominado *Weighted Monte Carlo*, que utiliza el concepto de entropía relativa para poder reflejar en la valoración la relación existente entre el precio de ejercicio y la volatilidad.

Siendo la entropía la expresión de la información que proporciona un suceso, inversamente proporcional a la probabilidad del mismo, el método de Montecarlo Ponderado permite dar mayor peso a la ocurrencia de sucesos poco frecuentes. De esta forma, es posible ajustar la probabilidad teórica de un suceso a la realidad del mercado.

# Abstract

The ultimate goal of this final project is to display the theoretical power that revolves around the concept of relative entropy, when it is used to solve the problems of equity derivatives valuation.

Through the Black-Scholes Model, two different valuation approaches can be drawn out: one with replicating portfolios and one with martingales. Both of these approaches converge on the same theoretical result.

The reality is that there is an empirically verifiable relationship between the strike prices and the implied volatility of market options. Nevertheless, the Black-Scholes Model does not take the aforementioned relationship into account. As will be seen further on, Black-Scholes presents certain limitations when completing a proper option valuation. For this reason, the topic of model risk is being introduced, which in this essay will be that derived from an incomplete market, i.e., that derived from valuing an option using two completely different probability measures.

Some of Black-Scholes constraints can be solved with another method known as Weighted Monte Carlo, which uses the concept of relative entropy as a mean to reflect the relationship between strike price and volatility, into the valuation.

Due to the entropy being the expression of the information provided by an event, inversely proportional to its probability, the Weighted Monte Carlo method allows the lending of more weight to the occurrence of less frequent events. Thus, it is consequently feasible to adjust an event's theoretical probability to the market situation.



# Capítulo 1

## Teoría de Valoración

A lo largo de los años la Teoría de Valoración Financiera se ha desarrollado para valorar correctamente los instrumentos financieros presentes en el mercado. En las últimas décadas han adquirido gran importancia los derivados, lo que ha dado lugar a un fuerte desarrollo teórico enfocado a solventar el problema de valoración de este tipo de instrumentos. El presente trabajo se centra en los derivados de renta variable y más concretamente, en las opciones.

La dificultad consiste en determinar el valor de la opción conociendo solamente la función de pagos de la opción al vencimiento, el precio inicial del activo subyacente, el del Bono Cupón Cero y potencialmente, otros instrumentos sobre el mismo activo.

Se introducen a continuación algunas nociones fundamentales del mundo financiero.

Según la RAE, un “activo financiero” es un título que representa para su poseedor derechos sobre bienes o rentas, y es un pasivo para el agente que lo ha emitido. El fin de un activo financiero o, sin más, de un “activo” es la inversión o la financiación.

Un activo financiero puede generar una serie de ingresos o gastos en un periodo determinado. Son los llamados “flujos de caja” o *cashflows*.

Se denomina “función de pagos” o *payoff* al resultado que generan los *cashflows*, ya sea positivo o negativo. Este *payoff* puede ser una simple sucesión numérica de *cashflow* o bien una función matemática.

Un “derivado” es un activo financiero cuyo precio depende de la evolución del precio de otro activo denominado “subyacente” o *underlying*. Aquellos

derivados cuyo subyacente es un activo de renta variable se denominan derivados de “renta variable” o derivados de *equity*. Una “opción” es un tipo de derivado de *equity* que consiste en un contrato que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender una determinada cantidad del activo subyacente, durante un periodo de tiempo determinado y a un determinado precio, a cambio del pago de una prima.

Una “cartera” o *portfolio* es un conjunto de activos adquiridos por un individuo. En general, su creación responde a un intento de diversificar la inversión y mitigar el riesgo. La cartera puede estar compuesta de cualquier tipo de activo, acciones, bonos, opciones...

## 1.1. Carteras Réplica

En 1973, Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton presentaron un modelo matemático que proponía una solución exacta al problema de valoración de opciones europeas<sup>1</sup>. Dicho modelo adopta el nombre de “Modelo de Black-Scholes” (MBS) y ha sido ampliamente reconocido en el mundo académico. Tanto es así que en 1997 se les otorgó a Merton y Scholes, Black ya había fallecido, el Premio Nobel.

La idea bajo la cual se fundamenta este modelo es la de que es posible “replicar” los flujos de caja de una opción con una cartera de valor  $V(t)$  formada por una cantidad  $X(t)$  del valor del activo subyacente de la opción  $S(t)$  y una cantidad  $Y(t)$  del valor de un activo libre de riesgo  $B(t)$ , el bono. Aritméticamente expresado:

$$V(t) = X(t)S(t) + Y(t)B(t).$$

**Definición 1.** Se dice que una cartera es **autofinanciada** si cumple la condición de autofinanciación, esto es, si

$$dV(t) = X(t)dS(t) + Y(t)dB(t),$$

donde  $X(t)$  y  $Y(t)$  son la cantidad de  $S(t)$  y  $B(t)$  respectivamente.

---

<sup>1</sup>Más adelante se explicará en qué consiste una opción *europea*.

Es decir, el *portfolio* no exige inyección ni retirada de dinero, depende sólo de la variación del precio del activo y del bono, no de su composición. Si el *portfolio* se recompone en tiempo continuo se hablará entonces de “recomposición continua” de la cartera.

**Definición 2.** Una **oportunidad de arbitraje** es una cartera autofinanciada tal que existe la posibilidad de obtener beneficio sin asumir ningún riesgo.

Existen dos tipos de arbitraje, débil y fuerte.

**Definición 3.** Sea  $V(t)$  el valor de una cartera autofinanciada. Se dice que existe **arbitraje débil** si se cumple

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(t) \geq 0, \quad t \in [0, T],$$

donde  $T$  es el vencimiento del contrato;

y que existe un **arbitraje fuerte** cuando para algún tiempo  $t$  el beneficio es estrictamente mayor que cero, es decir, cuando

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

**Definición 4.** Se habla de **cartera replicante** cuando la cartera está construida de tal forma que su valor coincide en todo momento con los pagos del activo que se quiere replicar. El precio inicial de la cartera debe ser igual al precio del activo que replica para que no exista oportunidad de arbitraje.

En el mundo del Modelo de Black-Scholes el mercado financiero está formado siempre por el activo subyacente de precio  $S(t)$  y por un activo libre de riesgo de precio  $B(t)$ , donde  $t \in [0, T]$ . En este mercado la cartera replicante será no sólo replicante sino también autofinanciada.

**Definición 5.** Un **proceso estocástico** es un conjunto de funciones reales  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dependientes del tiempo.

**Definición 6.** Se denomina **proceso de Wiener** o **movimiento browniano**  $W(t)$  a un proceso estocástico en tiempo continuo tal que  $W(0) = 0$ ,

sus incrementos siguen una distribución normal y son independientes siempre que correspondan a intervalos disjuntos. Esto es:

$$W(t) - W(s) \sim N(0, t - s), \quad 0 \leq s < t,$$

o equivalentemente:

$$W(t) - W(s) = \sqrt{t - s} \cdot Y, \quad \text{donde } Y \sim N(0, 1).$$

**Definición 7.** Se dice que un proceso estocástico  $X(t)$  sigue un **proceso de Itô** cuando cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t).$$

Lo que puede pensarse como la suma de dos componentes, una determinística  $a(X(t), t)dt$  y otra aleatoria  $b(X(t), t)dW(t)$ , donde  $W(t)$  es un proceso de Wiener y  $dW(t)$  y  $dX(t)$  son incrementos infinitesimales.

**Definición 8.** Se dice que el precio del subyacente  $S(t)$  sigue un **Movimiento Browniano Geométrico** (MBG) si satisface la siguiente EDE:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

siendo  $\mu$  la media y  $\sigma$  la “volatilidad” de  $S(t)$ .

A continuación se presentan las hipótesis sobre las que se fundamenta el Modelo de Black-Scholes.

- El precio del activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico traducible en tiempo discreto a una caminata logarítmico-normal (nunca toma valores negativos).
- La media o “tendencia”  $\mu$  y la volatilidad  $\sigma$  son conocidas a lo largo de la vida de la opción.
- No existen comisiones ni impuestos.
- El activo no reparte dividendos.
- No existen oportunidades de arbitraje.

- El intercambio en el mercado se da en tiempo continuo y la cartera se recompone continuamente.
- El tipo de interés continuo libre de riesgo es constante e igual a  $r$  para todos los vencimientos.
- Se puede comprar o vender cualquier cantidad (no necesariamente entera) de activo subyacente y vender una cantidad de activo que no se tiene (*short selling*).

Como se acaba de mencionar en las hipótesis, en este mercado el precio del bono está sujeto al tipo de interés constante  $r$  y se desarrolla según la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) con condición inicial:

$$\begin{cases} dB(t) = rB(t)dt \\ B(0) = 1, \end{cases}$$

y además el precio de la acción se modeliza mediante un MBG. Esto es lo mismo que decir que sigue un proceso de Itô con  $a(S(t), t) = \mu S(t)$  y  $b(S(t), t) = \sigma S(t)$ , formando la EDE:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \quad (1.1)$$

o, lo que es equivalente, que cumple las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right] \\ B(t) &= B(0)\exp(rt), \end{aligned}$$

donde a  $\mu$  se la denomina “deriva”,  $\sigma$  es la volatilidad del subyacente y  $W(t)$ , un proceso de Wiener.

Es importante hacer hincapié en el significado de los resultados que se obtienen de la resolución de una EDO y una EDE. El sistema

$$\begin{cases} dS(t) = a(S(t), t)dt & \text{[EDO]} \\ S(0) = S_0 & \text{[Condición inicial]} \end{cases}$$

brinda como resultado  $S(t), \forall t > 0$ , y el sistema

$$\begin{cases} dS(t) = a(S(t), t)dt + b(S(t), t)dW & [\text{EDE}] \\ S(0) = S_0 & [\text{Condición inicial}] \end{cases}$$

proporciona la distribución de probabilidad de  $S(t)$ ,  $\forall t > 0$ .

Fisher Black y Myron Scholes demostraron que, bajo las hipótesis anteriormente mencionadas, la siguiente ecuación en derivadas parciales (EDP) valoraba bien cualquier contrato con función de pagos  $h(t, S(t))$  en el que se deba pagar la prima al principio y sólo se pueda ejercer el derecho al vencimiento del mismo:

$$rh(t, S(t)) = rh_s(t, S(t))S(t) + h_t(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)). \quad (1.2)$$

Tal es el caso europeo.

Nótese que 1.2 no depende de  $\mu$ . El único parámetro libre de la ecuación es  $\sigma$ , que es la razón de cambio del precio de un activo subyacente. Black-Scholes asume que  $\sigma$  es constante, lo que implica una estimación previa de este valor.

Con Black-Scholes se valoran bien dos instrumentos financieros en cada vencimiento  $T$ : el activo subyacente  $S$  y el activo libre de riesgo  $B$ .

Antes de deducir la ecuación de Black-Scholes es necesario enunciar el famoso resultado encontrado por el matemático japonés Kiyosi Itô. A grandes rasgos, puede ser considerado la regla de la cadena del cálculo estocástico.

**Lema 1. Lema de Itô.** Si  $X(t)$  es un proceso estocástico que satisface la siguiente EDE:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t),$$

e

$$Y(t) = f(t, X(t)),$$

para algún  $f(t, x)$  con segunda derivada continua, entonces la diferencial estocástica de  $Y(t)$  es:

$$\begin{aligned} dY(t) = & \left[ f_t(t, X(t)) + a(t, X(t))f_x(t, X(t)) + \frac{1}{2}b(t, X(t))^2 f_{xx}(t, X(t)) \right] dt + \\ & + b(t, X(t))f_x(t, X(t))dW(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde

$$f_t(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}f(t, x), \quad f_x(t, x) = \frac{\partial}{\partial x}f(t, x), \quad f_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t, x).$$

**Deducción de la EDP de Black-Scholes.** Para deducir la famosa EDP de Black-Scholes se toma como punto de partida una cartera  $V(t)$  formada por una cantidad  $X(t)$  de activo subyacente y otra cantidad  $Y(t)$  de activo libre de riesgo. De manera que:

$$V(t) = X(t)S(t) + Y(t)B(t). \quad (1.4)$$

Dicha cartera debe ser autofinanciada, por lo que debe cumplir la condición de autofinanciación, luego:

$$dV(t) = X(t)dS(t) + Y(t)dB(t) = X(t)(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) + Y(t)(rB(t)dt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dV(t) = [X(t)\mu S(t) + Y(t)rB(t)]dt + X(t)\sigma S(t)dW(t). \quad (1.5)$$

Como se puede apreciar, esta ecuación tiene cierta similitud con la fórmula de Ito (1.3), resultado que se usará posteriormente en la demostración.

Es importante no perder de vista que el objetivo de la cartera (1.4) es replicar en todo momento el valor de la opción que queremos valorar. Por este motivo, tanto la notación del valor de la cartera como la del de la opción coinciden, siendo en ambos casos  $V(t)$ .

Una vez vista la composición de la cartera replicante, el valor de la opción  $V(t)$  en tiempo  $t$  será una función que depende de  $t$  y de  $S(t)$ :

$$V(t) = h(t, S(t)). \quad (1.6)$$

Por tanto, se cumple  $\forall t$  que:

$$h(t, S(t)) = X(t)S(t) + Y(t)B(t).$$

Dado que el precio del subyacente es un proceso que evoluciona según la EDE descrita en (1.1) y que el valor de la cartera es una función dependiente del subyacente, como puede verse en (1.6), es posible aplicar el *Lema de Itô*.

Los valores  $a(t, S(t))$  y  $b(t, S(t))$  se obtienen de la ecuación diferencial del precio (1.1) por lo que  $a = \mu S(t)$  y  $b = \sigma S(t)$ .

Aplicando la fórmula de Ito a (1.6) se tiene:

$$dV(t) = \left[ h_t(t, S(t)) + \mu S(t) h_s(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)) \right] dt + \sigma S(t) h_s(t, S(t)) dW(t). \quad (1.7)$$

Se igualan los coeficientes de  $dt$  y de  $dW(t)$  obtenidos previamente a través de la condición de autofinanciación (1.5) con los coeficientes respectivos de (1.7). Igualando los coeficientes correspondientes a  $dW(t)$  se obtiene que:

$$X(t)\sigma S(t) = \sigma S(t)h_s(t, S(t)) \Rightarrow X(t) = h_s(t, S(t)). \quad (1.8)$$

Por otro lado, igualando los de  $dt$  se obtiene que:

$$X(t)\mu S(t) + Y(t)rB(t) = h_t(t, S(t)) + \mu S(t)h_s(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(t)\mu S(t) + Y(t)rB(t) = h_t(t, S(t)) + \mu S(t)X(t) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(t)rB(t) = h_t(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)).$$

Despejando  $Y(t)$  se obtiene:

$$Y(t) = \frac{1}{rB(t)} \left[ h_t(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)) \right]. \quad (1.9)$$

Nótese que, simplificando las cuentas, el termino  $\mu$  ha desaparecido de la ecuación.

Finalmente, introduciendo (1.8) y (1.9) en (1.4), se obtiene una ecuación para  $V(t)$ :

$$V(t) = h(t, S(t)) = h_s(t, S(t))S(t) + \frac{1}{rB(t)} \left[ h_t(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)) \right] B(t) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow rh(t, S(t)) = rh_s(t, S(t))S(t) + h_t(t, S(t)) + \frac{\sigma^2 S(t)^2}{2} h_{ss}(t, S(t)).$$

Esta última es la famosa EDP de Black-Scholes.  $\square$

Gracias a la condición de autofinanciación, la cartera sólo estará libre de riesgo durante el intervalo  $[t, t + dt)$ . Cuanto más pequeño sea  $dt$  más exacto será el resultado. Por lo tanto, para que una cartera se mantenga libre de riesgo en un intervalo mayor habrá que recalcularla al principio de cada subintervalo.

## 1.2. Enfoque por Martingala

En 1979, J.M. Harrison y D.M. Kreps publicaron un artículo titulado *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets* donde se exponía una generalización de la valoración por Black-Scholes a través del enfoque por martingala. Este enfoque ofrece más libertad a la hora de valorar distintos tipos de opciones, dado que consiste en calcular esperanzas matemáticas a partir de la función de pagos de la opción.

A continuación se definen conceptos fundamentales de teoría de la medida necesarios para comprender la valoración por martingalas.

**Definición 9.** Un **espacio medible** es un par  $(\Omega, \mathcal{F})$  donde  $\Omega$  es un conjunto arbitrario y  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una clase de conjuntos con estructura de  $\sigma$ -álgebra, es decir, una familia de subconjuntos cerrada bajo complementos, uniones e intersecciones.

**Definición 10.** Dado el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ , se dice que la función  $X : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  es una **medida** si para todo  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que  $X^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{F}$ .

**Definición 11.** Sean  $\lambda$  y  $\mu$  medidas definidas en el espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Se dice que  $\lambda$  es **absolutamente continua** respecto de  $\mu$ , y se denota  $\lambda \ll \mu$ , si para  $A \in \mathcal{F}$ :

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) = 0.$$

**Definición 12.** Se dice que dos medidas  $\mu$  y  $\lambda$  son **equivalentes** si  $\mu \ll \lambda$  y  $\lambda \ll \mu$ .

**Definición 13.** Una medida  $\mathbb{P}$  definida en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  tal que  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$  y  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  es una **medida de probabilidad** y  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es un **espacio de probabilidad**.

**Definición 14.** Una **filtración** en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  es una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{F}$  tales que:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_t \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

La filtración  $\mathcal{F}_t$  puede interpretarse como una representación de toda la información obtenida hasta el instante  $t$ .

**Definición 15.** Una **variable aleatoria**  $X$  definida sobre el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall x \in \mathbb{R}$  se tiene que:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Una martingala es un proceso estocástico que representa un juego justo. De forma intuitiva, si  $X_s$  son las ganancias acumuladas en tiempo presente  $s$  entonces, en media, las ganancias esperadas en tiempo futuro  $t$  serán exactamente  $X_s$ , lo que indicaría que es indiferente seguir jugando o no.

**Definición 16.** Sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{F}_s$  una filtración con  $s \leq t$  y  $\{X(t)\}$  una sucesión de variables aleatorias que forman un proceso estocástico. Se dice que dicho proceso es una **martingala** si se cumple:

$$\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s) \quad , \quad t \geq s,$$

donde  $\mathbb{E}$  es la esperanza matemática.

En este caso  $\mathcal{F}_s$  representa la información proporcionada por el conjunto de sucesos  $X(0), X(1), \dots, X(s)$ .

**Definición 17.** Un **numerario** es cualquier proceso estocástico positivo tomado como medida monetaria de referencia en la cartera.

El enfoque por martingala para la valoración de activos se basa en la idea de que para fijar el precio bajo incertidumbre, debe fijarse el precio en un entorno donde el activo con riesgo  $S(t)$  evoluciona como una martingala cuando se expresa en unidades del activo libre de riesgo  $B(t)$  (el numerario).

**Definición 18.** Sea  $S(t)$  el precio del activo bajo el modelo de Black-Scholes:

$$S(t) = S(0) \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right],$$

y sea  $\tilde{S}(t)$  dicho precio actualizado:

$$\tilde{S}(t) = e^{-rt} S(t).$$

Se llama **probabilidad neutral al riesgo** a la medida de probabilidad  $\mathbb{P}_*$ , tal que el precio actualizado del activo  $S(t)$  es una martingala cuando se toma como numerario el factor de capitalización o *bankaccount*.

**Teorema 1. Teorema de Girsanov o de cambio de medida.** Sea  $W(t)$  un proceso de Wiener bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ , es decir, un proceso de Wiener definido en un espacio medible en el cual se ha definido a su vez una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$ , y  $W_*(t)$  un proceso de Wiener con deriva bajo  $\mathbb{P}$ , es decir, igual a  $W(t) + \gamma t$ , siendo  $\gamma$  cualquier constante real. Existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}_*$  equivalente a  $\mathbb{P}$ , tal que  $W_*(t)$  es un proceso de Wiener simple (o sin deriva) bajo  $\mathbb{P}_*$ .

Y además la “densidad” de  $\mathbb{P}_*$  con respecto a  $\mathbb{P}$  ( $d\mathbb{P}_*/d\mathbb{P}$ ) viene dada por:

$$\frac{d\mathbb{P}_*}{d\mathbb{P}} = \exp \left( -\gamma W(T) - \frac{1}{2} \gamma^2 T \right).$$

Podemos decir que cambiar la deriva de un movimiento browniano equivale a cambiar la medida de probabilidad.

Como se ha visto previamente, según las hipótesis de Black-Scholes el precio evoluciona según un movimiento browniano con deriva (o geométrico), pero para encontrar la medida de probabilidad neutral al riesgo es necesario que desaparezca la deriva. Se hacen los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}(t) &= d(e^{-rt} S(t)) = -r e^{-rt} S(t) dt + e^{-rt} dS(t) \\ &= e^{-rt} S(t) (-r dt + \mu dt + \sigma dW(t)) \\ &= \sigma \tilde{S}(t) d \left( -\frac{r - \mu}{\sigma} t + W(t) \right) \\ &= \sigma \tilde{S}(t) dW^*(t), \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde

$$W^*(t) = -\frac{r - \mu}{\sigma}t + W(t).$$

Por el teorema de Girsanov existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}_*$  tal que  $W^*(t)$  es un proceso de Wiener y cuya densidad cumple:

$$d\mathbb{P}_* = \exp\left(\frac{r - \mu}{\sigma}W(T) - \frac{1}{2}\left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right)^2 T\right) d\mathbb{P}.$$

Por lo tanto, existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}_*$  tal que  $\tilde{S}(t)$  sigue un movimiento browniano. Tal medida de probabilidad suele llamarse “medida de martingala”. Se puede probar de manera sencilla que el movimiento browniano es una martingala:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_*[W(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_*[(W(t) - W(s) + W(s))|\mathcal{F}_s] = \\ &= \mathbb{E}_*[W(s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}_*[(W(t) - W(s))|\mathcal{F}_s] = W(s),\end{aligned}$$

por lo que concluimos que bajo  $\mathbb{P}_*$  el precio actualizado del subyacente es una martingala, dado que es un movimiento browniano.

Los grandes pilares en los que se basa la Teoría de Valoración son los Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos (FTAP) que aseguran que bajo la hipótesis de ausencia de oportunidad de arbitraje existe una medida respecto a la cual la evolución de precios del activo es una martingala.

**Teorema 2. Primer Teorema Fundamental de Valoración de Activos (FTAP1).**

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- No existen oportunidades de arbitraje.
- Sea  $\Omega$  el conjunto de todos los escenarios del mercado, entonces  $\forall \omega \in \Omega$  existe una medida de probabilidad  $\mathbb{P}_*$  tal que  $\mathbb{P}_*(\omega) > 0$  y el precio actualizado del activo  $S$  es una martingala.

$$\mathbb{E}_*\left[\frac{S(T)}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{S(t)}{B(t)}. \quad (1.11)$$

Nótese que el *numerario* es el activo libre de riesgo (factor de capitalización), por lo que  $\tilde{S}(T) = \frac{S(T)}{B(T)}$ .

**Definición 19.** Se dice que un mercado es **completo** cuando todos los resultados se pueden replicar usando instrumentos disponibles en ese mercado.

**Teorema 3. Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos (FTAP2).**

Un mercado es completo  
y está libre de arbitraje  $\Leftrightarrow$  La medida de martingala es única.

Puede observarse que si se toma una cantidad del activo libre de riesgo equivalente a una unidad monetaria en tiempo  $t = 0$ , por (1.11) se cumple:

$$\mathbb{E}_* \left[ \frac{S(T)}{B(T)} | \mathcal{F}_0 \right] = \frac{S(0)}{B(0)}.$$

Como la filtración  $\mathcal{F}_0$  no proporciona información, es posible prescindir de ella. De manera que, si se sustituyen los valores deterministas del activo libre de riesgo, se obtiene

$$\mathbb{E}_* [S(T)] = e^{rT} S(0).$$

**Teorema 4.** Sea  $W_*(t)$  un proceso de Wiener y  $S(t)$  una martingala bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $\mathbb{P}_*$ . El valor actualizado de cualquier cartera auto-financiada  $V(t)$  es una martingala bajo  $\mathbb{P}_*$ .

Por lo tanto, si  $V(t)$  también cumple (1.11) entonces se tiene una fórmula para la valoración neutral al riesgo:

$$V(S(0), t(0)) = e^{-rT} \mathbb{E}_* [V(T)] = e^{-rT} \mathbb{E}_* [h(S(T))],$$

donde  $h(S(T))$  es la función de pagos a vencimiento de la opción.

Gracias al enfoque martingala, valorar una opción se reduce a calcular la integral del valor actualizado de la opción respecto de la medida  $\mathbb{P}_*$ . Además, dado que lo único que se necesita es saber la función de pagos de la opción, es posible calcular el valor de otro tipo de opciones no europeas dependientes de la trayectoria.

Un método ampliamente usado en el mundo matemático para calcular el valor aproximado de una integral es el método de Montecarlo. Éste se basa en la generación de números aleatorios, como se verá más adelante.

### 1.3. Feynman-Kac

Ambos enfoques, por martingala y por carteras replicantes, proponen un método de valoración de opciones válido. A simple vista la conciliación entre ambos enfoques no es trivial y sin embargo, como demostraron Richard Feynman y Mark Kac, son equivalentes.

#### **Teorema 5. Teorema de Feynman-Kac.**

La solución de la EDP de Black-Scholes con condición final

$$\begin{cases} f'_t(t, x) + rx f'_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f''_{xx}(t, x) = r f(t, x), & t < T, x \in \mathbb{R} \\ f(T, x) = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.12)$$

es equivalente a

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_* \left[ h \left( x e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W(T-t)} \right) \right],$$

bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo  $\mathbb{P}_*$ , donde  $W(t)$  es un proceso de Wiener bajo  $\mathbb{P}_*$ .

***Demostración.*** Se supone que  $f(t, x)$  es una solución al problema con condición final (1.12). Para cualquier  $s \leq T - t$  se define:

$$g(t; s, x) = e^{-rs} f(t + s, x),$$

se despeja  $f(t + s, x) = e^{rs} g(t; s, x)$  y se calculan las derivadas que aparecen en la EDP de Black-Scholes:

$$f'_s(t + s, x) = r e^{rs} g(t; s, x) + e^{rs} g'_s(t; s, x)$$

$$f'_x(t + s, x) = e^{rs} g'_x(t; s, x)$$

$$f''_{xx}(t + s, x) = e^{rs} g''_{xx}(t; s, x).$$

Dado que se ha tomado  $f(t, x)$  como solución de (1.12) se cumple:

$$re^{rs}g(t; s, x) + e^{rs}g'_s(t; s, x) + rxe^{rs}g'_x(t; s, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 e^{rs}g''_{xx}(t; s, x) = re^{rs}g(t; s, x),$$

simplificando la ecuación se obtiene:

$$g'_s + rxg'_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 g''_{xx} = 0. \quad (1.13)$$

Sea ahora el siguiente proceso estocástico:

$$Z(s) = xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma W(s)},$$

que como ya se ha visto (pag.14) satisface la siguiente EDE:

$$dZ(s) = rZ(s)ds + \sigma Z(s)dW(s).$$

Aplicando la fórmula de Itô:

$$dg(t; s, Z(s)) = \left[ g'_s(t; s, Z(s)) + rZ(s)g'_x(t; s, Z(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2 Z(s)^2 g''_{xx}(t; s, Z(s)) \right] ds + \sigma Z(s)g'_x(t; s, Z(s))dW(s).$$

Usando (1.13) se obtiene:

$$dg(t; s, Z(s)) = \sigma Z(s)g'_x(t; s, Z(s))dW(s),$$

o escrito de otra forma:

$$g(t; T-t, Z(T-t)) - g(t; 0, Z(0)) = \int_0^{T-t} \sigma Z(s)g'_x(t; s, Z(s))dW(s).$$

Si se toman esperanzas, a la izquierda de la igualdad se obtiene:

$$\mathbb{E}_* [g(t; T-t, Z(T-t)) - g(t; 0, Z(0))] = \mathbb{E}_* [g(t; T-t, Z(T-t))] - g(t; 0, Z(0)),$$

y a la derecha, gracias a las propiedades de las integrales estocásticas, se obtiene:

$$\mathbb{E}_* \left[ \int_0^{T-t} \sigma Z(s)g'_x(t; s, Z(s))dW(s) \right] = 0.$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_* [g(t; T - t, Z(T - t))] = g(t; 0, Z(0)) = f(t, Z(0)). \quad (1.14)$$

Tal y como se ha definido  $Z(s)$  se tiene que  $Z(0) = x$  y

$$f(T, x) = e^{r(T-t)} g(T - t; s, x). \quad (1.15)$$

Sustituyendo (1.15) en (1.14) queda demostrada la equivalencia:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \mathbb{E}_* [g(t; T - t, Z(T - t))] = \mathbb{E}_* [e^{-r(T-t)} f(T, Z(T - t))] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_* [h(Z(T - t))] \\ &\Leftrightarrow f(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_* \left[ h \left( x e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W(T-t)} \right) \right]. \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, se concluye que en un mundo donde el mercado es completo y existe ausencia de oportunidad de arbitraje, se cumple la equivalencia expresada en la siguiente figura:



Cuadro 1.1: Equivalencia metodológica



## Capítulo 2

# Derivados de Renta Variable

Un derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otro activo, llamado activo subyacente. Existen distintos tipos de derivados: sobre tipos de interés, sobre índices bursátiles, sobre acciones, etc. Dentro de los derivados de renta variable (o de *equity*) destacan los futuros sobre acciones y las opciones.

Como se ha dicho previamente, una opción consiste en un contrato que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar (*call*) o vender (*put*) una determinada cantidad del activo subyacente, durante un periodo de tiempo predeterminado, a un determinado precio, a cambio del pago de una prima. La prima pagada al adquirir la opción es igual al valor de la opción en tiempo  $t_0$ .

Cuando el comprador de la opción hace uso de su derecho a comprar o vender el activo subyacente se dice que “ejerce la opción”. El precio que paga al ejercer la opción es el “precio de ejercicio” o *strike* y ha sido fijado previamente.

Existe una gran variedad de opciones sobre activos de renta variable. Por un lado, las opciones de tipo europeo y las de tipo americano (pags. 27-28); ambas se denominan “opciones vainilla” o *vanilla options* y cotizan en mercados secundarios organizados. El resto de opciones son denominadas “opciones exóticas” o *exotic options*.

Cualquier tipo de opción puede clasificarse según la relación existente entre el *strike* y el precio del activo subyacente al vencimiento.

Strike	Call	Put
In the money	$Strike < S(t)$	$Strike > S(t)$
At the money	$Strike = S(t)$	$Strike = S(t)$
Out of the money	$Strike > S(t)$	$Strike < S(t)$

Cuadro 2.1: Clasificación según el valor intrínseco

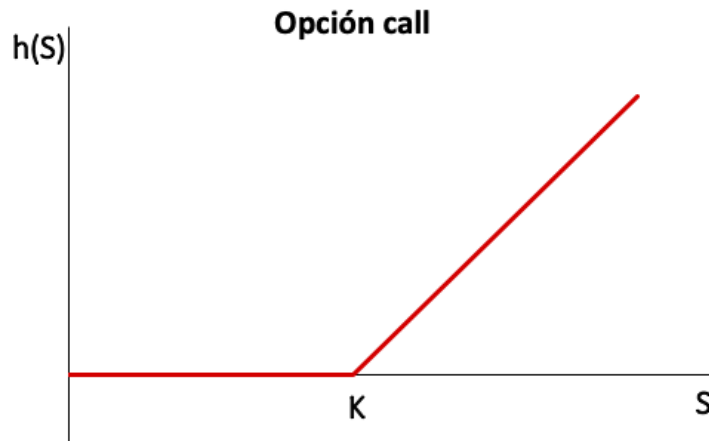
## 2.1. Opciones Vainilla

### Opción de Compra Europea

También denominada *European Call Option*. El comprador de esta opción tiene derecho a comprar en el vencimiento<sup>1</sup>  $T$  una unidad del activo subyacente  $S$  a un precio predeterminado  $K$  (*strike* o precio de ejercicio).

Su función de pagos es una función  $h : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  tal que:

$$h(S(T)) = \max(S(T) - K, 0) = (S(T) - K)^+.$$



Cuadro 2.2: Gráfica de una opción *call*

Si en el vencimiento el precio del activo es mayor que el *strike*,  $S(T) > K$ , interesará ejercer la opción porque se obtendrá como beneficio la diferencia

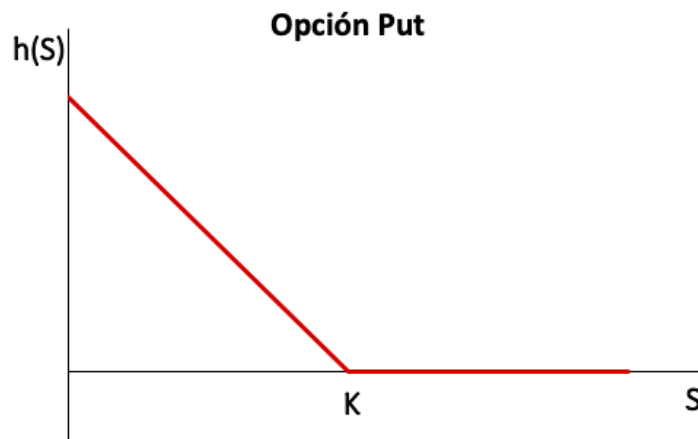
<sup>1</sup> $T$  es el valor anualizado del tiempo que queda hasta el vencimiento.

$S(T) - K$ . Si por el contrario el precio del activo es menor que el *strike*,  $S(t) < K$ , no interesará ejercer la opción porque el valor de la opción será 0.

### Opción de Venta Europea

En inglés *European Put Option*. El comprador de esta opción *put* tiene el derecho, pero no la obligación, de vender en el vencimiento  $T$  una unidad del activo subyacente  $S$  a un precio de *strike*  $K$ .

La función de pagos de la *put* europea es  $h(S(T)) = \max(K - S(T), 0) = (K - S(T))^+$ .



Cuadro 2.3: Gráfica de una opción *put*

### Opción de Compra Americana

La *American Call Option* otorga al poseedor el derecho a comprar una unidad de  $S$  a precio  $K$  en cualquier momento  $t$  anterior al vencimiento  $T$ .

La función de pagos de una *call* americana coincide con la función de pagos de una *call* europea pero en cualquier tiempo  $t$  anterior al vencimiento  $T$ , de manera que:

$$h(S(t)) = (S(t) - K)^+.$$

### Opción de Venta Americana

La *American Put Option* otorga al poseedor el derecho a vender una unidad de  $S$  a precio  $K$  en cualquier momento  $t$  anterior al vencimiento  $T$ .

Su función de pagos es:

$$h(S(t)) = (K - S(t))^+ \quad , \quad \forall t \leq T.$$

## 2.2. Opciones Exóticas

### Opciones con barrera

Si la barrera  $B$  es inferior, entonces el valor de la opción es cero si el precio del subyacente cae por debajo de  $B$ . La función de pagos de una *call* con barrera inferior  $B$  y *strike*  $K$  es:

$$h(S(t)) = \begin{cases} \max(S(T) - K, 0) & \text{si } S(t) \geq B, \quad \forall t \leq T \\ 0 & \text{si } S(t) < B \text{ para algún } t \leq T. \end{cases} \quad (2.1)$$

En caso de que la barrera sea superior, el *payoff* es cero si el valor de la opción supera la barrera. También existen opciones con barrera tanto inferior como superior, por ejemplo las opciones *inline*.

### Opciones asiáticas

Son aquellas opciones cuya función de pagos depende del promedio de los precios de la acción en un determinado periodo de tiempo.

### Opciones Lookback

Son aquellas opciones cuya función de pagos depende del valor máximo o mínimo que alcanza la opción en un periodo de tiempo.

## 2.3. Futuros

Un “futuro” o *forward*,  $F$ , consiste en un contrato en el que una de las partes se compromete a comprar o vender un activo  $S$  a un precio determinado  $K$

en una fecha futura  $T$ . El precio actual del activo subyacente se denomina “precio corriente” o *spot*.

Si el activo no genera ingresos, en el caso de renta variable serian acciones que no pagan dividendos, la relación entre el *forward* y el *spot* es:

$$F(0) = S(0)e^{rT},$$

donde  $r$  es el tipo de interés libre de riesgo.

En el caso de que el activo genere un tasa continua de beneficios  $q$ , la relación sería:

$$F(0) = S(0)e^{(r-q)T}.$$

## 2.4. Valoración por Black-Scholes

Como se ha visto previamente, la valoración por martingala reduce la valoración al cálculo de una esperanza matemática y exige únicamente el conocimiento de la función de pagos de la opción. Por estas razones, es posible valorar no sólo opciones europeas sino también otro tipo de opciones como las americanas u opciones exóticas dependientes de la trayectoria. Podría decirse, por este motivo, que la valoración por martingala proporciona un método más genérico y más útil que el Método de Black-Scholes.

Para el cálculo de la esperanza se utilizan métodos numéricos que proporcionan una aproximación al valor de la opción mientras que, como se demostrará a continuación, la EDP de Black-Scholes tiene solución exacta en el caso de opciones europeas, lo que evita cometer errores de valoración debido a una mala aproximación numérica.

La solución de la ecuación de Black-Scholes (1.2) con la condición final para una *call* europea  $V(T) = (S(T) - K)^+$  viene dada por:

$$[V(t) =] C(t) = S(t)N(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-),$$

donde

$$d_{\pm} = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y  $N(x)$  es la distribución normal estándar acumulada.

Para una *put* europea con condición final  $V(T) = (K - S(T))^+$  el resultado es:

$$[V(t) =] P(t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_-) - S(t)N(-d_+).$$

Gracias al Teorema de Feynman-Kac es relativamente sencillo demostrar estos resultados.

### ***Demostración para la European Call.***

$$\begin{aligned} C(t) = f(S(t), t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ h \left( S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W(T-t)} \right) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ \max \left( S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W(T-t)} - K, 0 \right) \right], \end{aligned}$$

dado que los incrementos disjuntos de un proceso de Wiener siguen una distribución normal se tiene:

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[ \max \left( S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot y} - K, 0 \right) \right] dy.$$

Se calcula el umbral donde  $S(T-t) \geq K$  para separar la integral en dos partes:

$$\begin{aligned} S(T-t) \geq K &\Leftrightarrow S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot y} \geq K \\ &\Leftrightarrow \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot y \geq \log \left( \frac{K}{S(0)} \right) \quad (2.2) \\ &\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \log \left( \frac{K}{S(0)} \right) - \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right] = d_-. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} C(t) &= e^{-r(T-t)} \int_{d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left( S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot y} - K \right) dy \\ &= S(0) \int_{d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\sigma\sqrt{T-t} \cdot y} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} dy - Ke^{-r(T-t)} \int_{d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Se emplea el siguiente cambio de variable en la primera integral para aprovechar la propiedad del cuadrado de una diferencia:

$$z = y - \sigma\sqrt{T-t} \Leftrightarrow z^2 = y^2 - 2\sigma\sqrt{T-t} \cdot y + \sigma^2(T-t).$$

El límite inferior cambia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d_+ &= d_- - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \log\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right] - \sigma\sqrt{T-t} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \log\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right]. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} C(t) &= S(0) \int_{d_+}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - K e^{-r(T-t)} \int_{d_-}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= S(0)N(d_+) - K e^{-r(T-t)}N(d_-). \end{aligned}$$

□

Si se procede a valorar la misma opción por el enfoque martingala se obtiene el mismo resultado. Se ha visto que para una cartera genérica  $V(t)$  se tiene:

$$\mathbb{E}_* \left[ \frac{V(T)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{V(t)}{B(t)}.$$

Se sabe que  $B(0) = 1$  y que el proceso  $\{B(t)\}_t$  es determinista, por lo que:

$$\mathbb{E}_* [V(T) | \mathcal{F}_t] = e^{r(T-t)} V(t) \quad \Leftrightarrow \quad V(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_* [V(T) | \mathcal{F}_t].$$

El valor de la cartera replicante  $V(t)$  y el de la opción deben coincidir en todo momento, por lo que si la opción es una *call* europea debe cumplirse  $V(T) = C(T)$  y por lo tanto:

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_* \left[ \max \left( S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \cdot y} - K, 0 \right) \right],$$

es decir, como no podía ser de otro modo, se llega al mismo resultado a través de la EDP Black-Scholes que a través del enfoque por martingala.

Como consecuencia de la hipótesis de evolución del precio y de que el tipo de interés  $r$  es constante, Black-Scholes valora correctamente en todo momento  $t$  el valor del subyacente y el del activo libre de riesgo. Teóricamente debe valorar bien también todas las opciones europeas sobre el subyacente. Sin embargo, si se toman del mercado los valores de opciones europeas sobre el mismo activo pero con distinto *strike* y se invierte numericamente la fórmula de Black-Scholes para obtener el valor de la volatilidad  $\sigma$  no se obtiene un único valor como cabría esperar.

## Capítulo 3

# Riesgo de Modelo en Derivados de Renta Variable

### 3.1. Riesgo de Modelo

En la literatura actual las dos definiciones más genéricas de riesgo de modelo son las de E. Derman y R.Rebonato. Según el primero:

*Es riesgo de modelo la descripción poco realista de los factores que afectan al valor de los derivados.*

Es posible que al establecer las hipótesis bajo las que se verifica el modelo se hagan asunciones incorrectas o no se estén teniendo en cuenta aspectos relevantes.

Por su parte, Rebonato da la siguiente definición:

*El riesgo de modelo es el riesgo de que exista una diferencia significativa entre el valor que el modelo asigna al derivado y su valor en el mercado.*

Tras esta interpretación se deduce la prioridad de reducir las diferencias con los valores del mercado. Cuanto menor sea la diferencia entre los dos valores, menores serán las pérdidas asociadas al riesgo de modelo.

Los enfoques de valoración vistos hasta ahora asumen que el valor de cualquier opción que se quiera valorar es replicable con los instrumentos disponibles en el mercado, esto es, que el mercado es completo. Pero la realidad es que los mercados financieros son incompletos y no siempre es posible formar una cartera replicante.



Según el FTAP2, lo que garantizaba la unicidad de una medida  $\mathbb{P}_*$  bajo la cual el precio actualizado del subyacente fuese una martingala era la completitud del mercado.

Si el mercado fuese completo, la medida  $\mathbb{P}_*$  estaría univocamente definida y el único obstáculo sería que la medida  $\mathbb{P}$  no estuviese definida por la falta de datos históricos. Sin embargo, en un mundo más realista el mercado es incompleto, razón por la cual puede existir más de una medida  $\mathbb{P}_{1*}, \mathbb{P}_{2*}, \mathbb{P}_{3*}, \dots$  y cada una de estas medidas conduciría a una valoración distinta de la misma opción no incluida en la calibración.

En resumen, en el presente trabajo se entiende por riesgo de modelo el riesgo derivado de la ambigüedad existente a la hora de valorar una misma opción usando distintas medidas de probabilidad [9].

## 3.2. Volatilidad implícita

La formula de Black-Scholes permite valorar una opción europea a partir del valor actual del subyacente  $S(0)$ , el *strike*, el vencimiento  $T$ , el tipo de interés libre de riesgo  $r$  y la volatilidad del subyacente. De todos estos parámetros presentes en la fórmula el único que es desconocido es la volatilidad. Por ello es muy importante hallar una estimación correcta de la misma. Para estimar la volatilidad es posible recurrir a los precios históricos del subyacente. Otra posibilidad es la de calcular la volatilidad usando la fórmula de Black-Scholes. En efecto, si se toma el valor de mercado de una opción europea es posible invertir numéricamente la fórmula de Black-Scholes para hallar la volatilidad del subyacente de la opción.

**Definición 20.** Se denomina **volatilidad implícita** al valor  $\sigma$  tal que, introducido en la fórmula de Black-Scholes, da como resultado el valor de mercado de la opción.

Al ser la volatilidad el único parametro libre de la fórmula de Black-Scholes es correcto pensar que saber el precio de una opción es equivalente a saber su volatilidad implícita, ya que sabiendo el valor que toma uno de ellos es posible obtener el valor del otro.

Para hallar la volatilidad implícita es necesario recurrir a métodos de aproximación numéricos, dado que no es posible despejar matemáticamente la fórmula de Black-Scholes.

### 3.3. Limitaciones del Modelo de Black-Scholes

Pese a la genialidad del resultado teórico y a pesar de usarse en el mundo práctico, especialmente para calcular la volatilidad implícita del subyacente, muchos se muestran reacios a confiar en los resultados y consideran que el Modelo de Black-Scholes no se adapta a la realidad. En efecto, la fórmula de Black-Scholes muestra deficiencias cuando se comparan los resultados teóricos obtenidos mediante ella con los resultados empíricos obtenidos del mercado. Por ejemplo, se obtienen dos valores distintos al calcular la volatilidad implícita de dos opciones con distinto *strike* sobre el mismo subyacente y no un solo valor como cabría esperar.

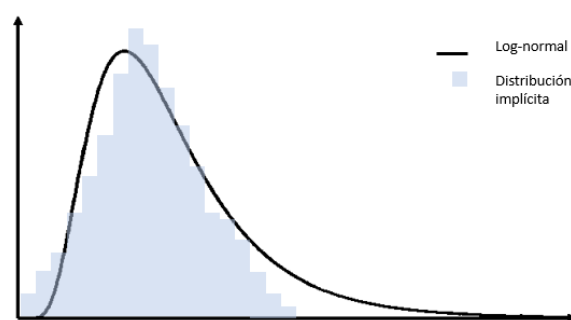
En general, las limitaciones de un modelo matemático son consecuencia de las hipótesis del mismo. Si algo está claro es que para modelizar cualquier situación se deben simplificar las reglas del entorno que la rodea. En el caso que nos ocupa, el entorno lo delimitan las hipótesis de Black-Scholes, que reducen un ámbito muy complejo como es el del mercado financiero a uno relativamente ordenado. Como se explica más adelante, tal simplificación de la realidad produce discordancias entre ésta y la teoría.

En 1987, en el denominado *Black Monday* se desplomaron las bolsas más importantes del mundo, dando lugar a una de las mayores crisis financieras que han existido. Ese día se registró la mayor pérdida en una sesión de la historia del *Dow Jones*, que cayó un 22,6 %.

Hasta ese momento la metodología presentada en 1973 por Fischer Black y Myron Scholes había sido ampliamente usada en el sector financiero. Sin embargo, este suceso hizo cuestionarse si la evolución del subyacente que se había asumido hasta la fecha era la correcta. Todo ello originó la revisión de los resultados obtenidos del modelo de valoración de Black-Scholes y la corrección de los mismos para tener más en cuenta sucesos excepcionales con una probabilidad de ocurrencia muy pequeña. Es necesario recordar que para llegar a la famosa EDE de Black-Scholes es necesario asumir que el precio del subyacente sigue una distribución log-normal, por este motivo, al dar más peso a escenarios extremos implícitamente se está cambiando la distribución de probabilidad por lo que deja de ser válida.

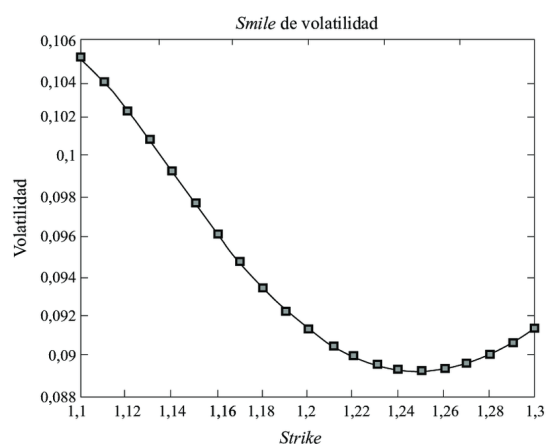
Al valorar opciones por el método de Black-Scholes la volatilidad del activo subyacente, al ser una característica del subyacente, se supone constante independientemente del *strike*. Sin embargo, se puede observar que la volatilidad implícita de las opciones del mercado tiene una estrecha relación con

su precio de ejercicio. Este vínculo entre la volatilidad y el *strike* implica que no se cumple una de las hipótesis del Modelo de Black-Scholes. La realidad es que la distribución asumida para el subyacente en el modelo de Black-Scholes y la distribución que asume implícitamente el mercado son distintas. La primera sigue una distribución log-normal mientras que la segunda es una distribución con las colas más pesadas. Según Rubinstein (cit. en [12]), tras la crisis de 1987 cambió la manera de percibir el mercado financiero. Los *traders* empezaron a asignar mayores probabilidades a grandes caídas en el precio del subyacente y menores probabilidades a grandes subidas. Así la distribución que adoptaría el subyacente tendría la cola izquierda más pesada que la derecha.



Cuadro 3.1: Distribución del subyacente

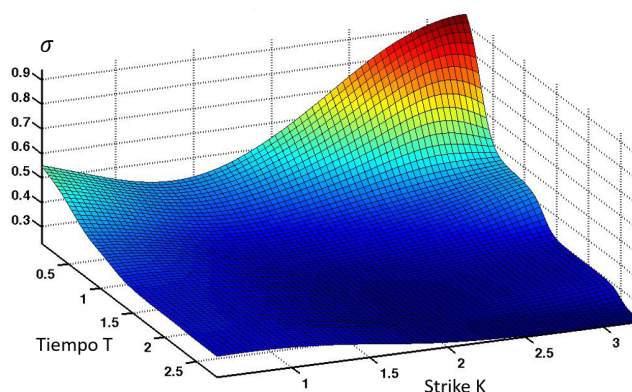
Bajo esta distribución la relación entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio adopta una forma característica que se denomina “sonrisa de volatilidad” o *smile* [13].



Cuadro 3.2: Sonrisa de volatilidad

Esta curva presenta una clara asimetría. Según Serna, ésta podría estar explicada por la presencia de asimetría en la distribución del subyacente (figura 3.1) que tiene el efecto de acentuar más el lado izquierdo de la curva, o por los efectos de los costes de transacción que se suponían inexistentes en el Modelo de Black-Scholes. Otra explicación posible reside en que las opciones de *strike* menor suelen ser *puts* y con su compra es posible cubrirse de grandes caídas del mercado, por lo que son un instrumento muy atractivo y con una gran demanda en el mercado.

Fijado el subyacente, para cada vencimiento se tiene un *smile*. La unión de todas las sonrisas de volatilidad asociadas a los vencimientos da lugar a una superficie denominada “superficie de volatilidad”.



Cuadro 3.3: Superficie de volatilidad

Empíricamente se observa que la hipótesis sobre la distribución del precio no es la única que conduce a una valoración incorrecta de la opción. La realidad muestra que la volatilidad del subyacente no es constante, puede cambiar y es posible que las variaciones sean considerables. El mismo problema existe con la hipótesis de tipo de interés constante: el tipo de interés no es constante en el mundo real.

La idea de recomposición continua de la cartera también es teórica. En la práctica no es posible llevarla a cabo. Existen modelos que descartan tal hipótesis en el planteamiento de Black-Scholes y como consecuencia resulta que el término  $\mu$  no desaparece de la ecuación.

Como se ha visto previamente, en teoría la valoración con Black-Scholes valora correctamente dos instrumentos (un activo libre de riesgo y el subyacente

de la opción). Si además se incorpora la volatilidad implícita, se consigue valorar correctamente un tercer instrumento, una opción. Sin embargo, a pesar de que la ecuación de Black-Scholes tiene solución exacta, no recoge el efecto del *smile*.

Y sin embargo es necesario incorporar la influencia del *smile* a la hora de valorar opciones, pues de no hacerlo se infravalora la ocurrencia de eventos extremos. Existen en el mercado financiero instrumentos que ya lo incorporan y deben ser tenidos en cuenta a la hora de valorar correctamente otros instrumentos financieros.

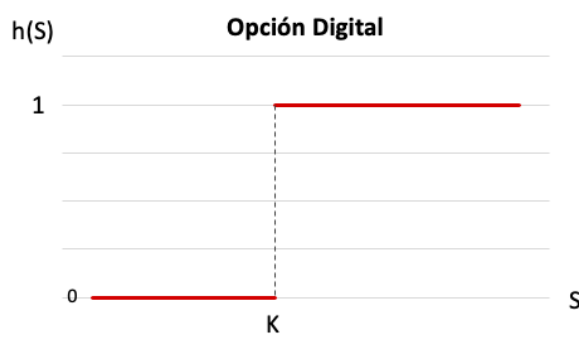
### 3.4. Ejemplo de Riesgo de Modelo

Las opciones digitales proporcionan un ejemplo sencillo para percibir y entender mejor el riesgo de modelo del que se está hablando. En este tipo de opciones el comprador de la opción digital apuesta a que el precio del subyacente  $S$  será mayor que un cierto valor  $K$  en la fecha de vencimiento  $T$ . Si se cumple esto en el vencimiento, el comprador gana una cantidad fija  $C$  acordada previamente a la hora de firmar el contrato; pero si el precio del subyacente queda por debajo de  $K$ , el comprador no gana nada y pierde la prima pagada.

En resumen, la función de pagos de una opción digital es:

$$h(S(T)) = \begin{cases} C & \text{si } S(T) > K \\ 0 & \text{si } S(T) \leq K. \end{cases}$$

Si  $C = 1$ , se habla de “opción digital unitaria”.



Cuadro 3.4: Gráfica de una opción digital unitaria

Según el método de Black-Scholes el precio de una opción digital  $V_D$  sería:

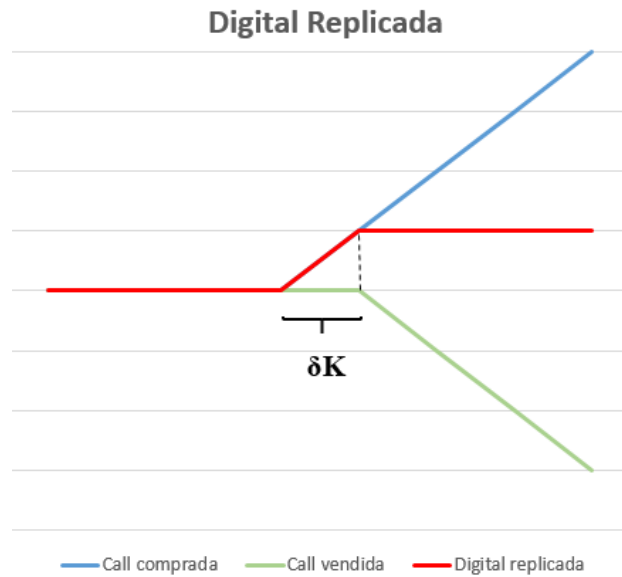
$$V_D(S(0), t(0)) = e^{-rT} C \cdot N(d_-),$$

siendo

$$d_- = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}.$$

Como en los casos de muchas otras opciones exóticas es posible replicar su comportamiento a través de la combinación de opciones vainilla.

Para valorar una opción digital a través del método de carteras réplica se combinan dos opciones de compra europeas. Se compra una cantidad  $\frac{1}{\delta K}$  de una *call* con *strike*  $K$  y se vende la misma cantidad de otra *call* con *strike*  $K + \delta K$ .



Cuadro 3.5: Réplica de una opción digital

El *payoff* de esta estrategia es:

$$V_D(T) = \frac{1}{\delta K} [C_K - C_{K+\delta K}] = \begin{cases} 0 & \text{si } S(T) \leq K \\ \frac{S(T)-K}{\delta K} & \text{si } K < S(T) \leq K + \delta K \\ 1 & \text{si } S(T) > K + \delta K. \end{cases}$$

Si se toma el límite:

$$\lim_{\delta K \rightarrow 0} \frac{C_K - C_{K+\delta K}}{\delta K} = -\frac{\partial C}{\partial K}. \quad (3.1)$$

Nótese que para que este razonamiento sea válido deben añadirse dos hipótesis adicionales:

- Existe continuidad en  $K$ .
- Es posible comprar y vender cualquier cantidad de opción.

Al replicar la digital se hace uso de dos opciones *call* con distinto *strike*, esto es, con distinta volatilidad implícita, por lo que la valoración por el Método de Black-Scholes sería incorrecta. En efecto, una de las principales hipótesis del Modelo de Black-Scholes es que la volatilidad estimada del subyacente es independiente del *strike*. Si esto fuese cierto, entonces todas las opciones digitales sobre el mismo subyacente tendrían el mismo valor si se expresasen en términos de la volatilidad.

Se ha visto que, en el límite, la opción digital es igual a  $-\frac{\partial C}{\partial K}$ . Para llegar a ese resultado no ha sido necesario tener en cuenta explícitamente la dependencia de la volatilidad del *strike* porque el razonamiento se ha hecho a través de una cartera replicante cuyos valores se obtienen del mercado y esto quiere decir que incorporan el *smile* implícitamente. Una vez obtenido el resultado (3.1) es razonable intentar aplicar el algoritmo de valoración de Black-Scholes para valorar una opción digital. El único problema es que Black-Scholes no incorpora el *smile*. Para tenerlo en cuenta se, entonces, incorpora la hipótesis de que la volatilidad es una función dependiente del *strike*  $\sigma(K)$ . En este caso, el *payoff* de una *call* con vencimiento  $T$  sería una función  $C(K, \sigma(K); T)$  y su derivada<sup>1</sup>:

$$-\frac{\partial C(K, \sigma(K))}{\partial K} = -\frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial K}.$$

Se comprueba que al aplicar Black-Scholes teniendo en cuenta el *smile* aparece un “término corrector” compuesto de dos partes:

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial \sigma}}_{\nu} \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial K}}_{slope}.$$

---

<sup>1</sup>Sea  $f(x, y)$  una función multivariable y  $x(t)$  e  $y(t)$  dos funciones de una sola variable, la regla de la cadena dice que  $\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$ .

A  $\nu$  se le denomina “vega” de la opción y recoge la sensibilidad de la misma a variaciones en la volatilidad. La segunda parte del término corrector es la “pendiente” o *slope* del *smile*.

Por lo tanto, se concluye que la valoración por el Método de Black-Scholes es incorrecta, dado que no tiene en cuenta el *smile* de volatilidad. Como se ha visto, para resolver este problema es necesario incorporar un término corrector en la valoración.

Retomando las dos definiciones de riesgo de modelo vistas al inicio de este capítulo, se observa que la valoración de la opción por Black-Scholes conlleva riesgo de modelo conforme a la definición de Derman, por el hecho de que las hipótesis asumidas no replican fielmente la realidad; pero la valoración de la opción también conlleva riesgo de modelo según Rebonato porque, como se ha visto, el MBS no valora correctamente la opción.



## Capítulo 4

# Entropía Relativa Mínima

Antes de abordar el concepto en cuestión, conviene recordar algunas definiciones.

**Definición 21.** Si  $X$  es una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , la **función de distribución** de  $X$  es la función  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida así:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

La función de distribución caracteriza a una variable aleatoria. Existen variables aleatorias discretas, continuas y otras que no son ni discretas ni continuas. Todas ellas tienen función de distribución.

**Definición 22.** Sea  $X$  una variable aleatoria discreta sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Se denomina **función de probabilidad** (o función de masa de probabilidad) a la función  $p_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida así:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}).$$

**Definición 23.** Sea  $X$  una variable aleatoria continua sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y  $F_X$  su función de distribución. Se dice que  $X$  tiene **función de densidad**  $f_X$  si:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du,$$

para alguna función no negativa  $f_X$ .

Conceptualmente la función de densidad equivale, en el caso de variables aleatorias continuas, a la función de probabilidad de las variables aleatorias discretas.

## 4.1. Entropía y Entropía Relativa

En estadística, la entropía está relacionada con el concepto de información: es una medida de la incertidumbre relativa al resultado de una variable aleatoria. Se han propuesto gran variedad de funciones  $H(X)$  que pretenden medir cuánta información proporciona la ocurrencia de un suceso  $x$  con probabilidad  $p$  de ocurrir.

Intuitivamente es posible apreciar que la ocurrencia de un suceso muy probable ha de proporcionar poca información mientras que la de un suceso poco probable proporciona mucha; por este motivo  $H(X)$  debe ser una función decreciente y no negativa.

Si toda la probabilidad se centra en un único suceso,  $P(X = x) = 1$ , entonces no existe incertidumbre sobre el valor que tomará  $X$  por lo que la entropía debe ser 0. Por el contrario, si la probabilidad de un suceso tiende a cero entonces la entropía tenderá a  $+\infty$ .

Es importante destacar que la entropía depende sólo de la función de probabilidad y no de la variable aleatoria en sí misma.

A continuación se presenta el concepto de entropía de una variable aleatoria discreta publicado en 1948 por C.E. Shannon en su artículo «Una teoría matemática de la comunicación»<sup>1</sup>.

**Definición 24. Entropía de Shannon.** Sea  $X$  una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad  $\mathcal{A}$  y con función de probabilidad  $p(x)$ . La **entropía** de  $X$  es

$$H(X) = -\mathbb{E}_p [\log (p(X))] = - \sum_{x \in \mathcal{A}} p(x) \log p(x).$$

El valor máximo de la entropía se tiene cuando la distribución de probabilidad es uniforme, es decir, cuando todos los sucesos son equiprobables.

---

<sup>1</sup>«A mathematical Theory of Communication», en *The Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, July, October, 1948.

Existe otro concepto estrechamente ligado al de la última definición y es el de entropía relativa. La entropía relativa mide la divergencia que hay entre dos funciones de probabilidad  $q$  y  $p$ , suponiendo que  $q(x)$  es la función real y  $p(x)$  la aproximada.

**Definición 25. Entropía Relativa o Distancia de Kullback-Leibler.**

Sean  $P$  y  $Q$  dos variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , con función de probabilidad  $p(x)$  y  $q(x)$  respectivamente. Entonces la **entropía relativa** de  $p$  con respecto de  $q$  es:

$$H(p||q) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[ \log \left( \frac{p(X)}{q(X)} \right) \right] = \sum_{x \in \Omega} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se denomina “distancia” de Kullback-Leibler, pero no es una distancia propiamente dicha, dado que no es simétrica. Mide la similitud o diferencia existente entre dos distribuciones de probabilidad  $P$  y  $Q$ .

Por convención  $0 \log(0/q) = 0$  y  $p \log(p/0) = \infty$ . La entropía relativa es siempre no negativa y  $H(p||q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ .

Existen otro tipo de funciones que miden la similitud entre dos distribuciones de probabilidad; un ejemplo es la distancia de Hellinger [1]. Sin embargo, es interesante el uso de la distancia de Kullback-Leibler porque, como se verá en datalle más adelante, posee algunas propiedades muy útiles desde el punto de vista práctico y de teoría de valoración.

## 4.2. Principio de Máxima Entropía

El “Principio de Indiferencia” consiste en asignar la misma probabilidad a todos los sucesos si no existe razón alguna por la que un suceso sea más probable que otro. La valoración por Montecarlo, más adelante se verá en qué consiste, usa este principio, ya que asigna a cada suceso la probabilidad  $1/n$ .

Sin embargo, tras la definición de entropía surge la posibilidad de encontrar una función de probabilidad que no sólo no suponga *a priori* lo que no se sabe sino que además, dadas ciertas condiciones, maximice la cantidad de información. Maximizando la entropía se da más importancia a escenarios poco probables lo que resuelve el problema de la volatilidad constante.

Sean un espacio de probabilidad  $A$  compuesto por  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sucesos y  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , un conjunto de funciones  $h_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (en adelante  $h_j(x_i) = h_{ij}$ ). Es posible que interese conocer la función de probabilidad  $p$  en  $\Omega$  que satisface  $\sum_{i=1}^n p_i h_{ij} = C_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  y maximiza la entropía, donde  $p(x_i) = p_i$ .

En resumen, el problema a resolver es el siguiente:

$$\text{máx} \left( - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \right), \quad (4.1)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i h_{ij} &= C_j \quad j = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1. \end{aligned}$$

Su solución se halla a través del método de multiplicadores de Lagrange.

**Solución.** Sean las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(p_1, \dots, p_n) &= - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \\ g_j(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n p_i h_{ij} - C_j \quad j = 1, \dots, m, \\ t(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n p_i - 1. \end{aligned}$$

Se define el Lagrangiano como

$$L = \vec{\nabla} f - \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{\nabla} g_j - \mu \vec{\nabla} t,$$

se calculan las derivadas parciales  $\frac{\partial}{\partial p_i}$  y se igualan a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = -\log p_i - 1 - \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} - \mu = 0.$$

Despejando las  $p_i$  se tiene:

$$p_i = \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} + \mu - 1\right). \quad (4.2)$$

Se aplica sumatorio en  $i$  en ambas partes de la ecuación:

$$1 = \sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} + \mu - 1\right).$$

Ahora se despeja  $\mu$ :

$$\begin{aligned} 1 &= e^\mu \sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \log(1) &= \log\left(e^\mu \sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} - 1\right)\right) \\ \Leftrightarrow 0 &= \mu + \log\left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} - 1\right)\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\mu$  en (4.2) se obtiene la solución al problema:

$$\begin{aligned} p_i &= \exp\left[\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} - \log\left(\sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} - 1\right)\right) - 1\right] \\ p_i &= \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij}\right)} = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij}\right)}{Z(\lambda)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

$$Z(\lambda) = \sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij}\right).$$

Los  $\lambda_i$  se eligen de tal manera que deben satisfacer las restricciones incluidas en el problema de maximización (4.1). Una vez encontrada la condición que deben cumplir las  $p_i$  es posible transformar el problema original en otro equivalente más fácil de resolver y que ya lleva incorporadas las restricciones de

(4.1). Para ello se sustituye la condición (4.3) en el Lagrangiano  $L$  construido a partir del problema de maximización.

$$\begin{aligned}
L &= \log n + \sum_{i=1}^n p_i \log p_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \sum_{i=1}^n p_i h_{ij} - C_j \right) \\
&= \log n + \sum_{i=1}^n p_i \left( -\log (Z(\lambda)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left( \sum_{i=1}^n p_i h_{ij} - C_j \right) \\
&= \log n - \sum_{i=1}^n p_i \log (Z(\lambda)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i \lambda_j h_{ij} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i \lambda_j h_{ij} + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j \\
&= \log n - \sum_{i=1}^n p_i \log (Z(\lambda)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j \\
&= \log n - \log (Z(\lambda)) \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j \\
&= \log n - \log (Z(\lambda)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j.
\end{aligned}$$

Maximizar  $L$  es equivalente a minimizar  $-L$  por lo que el problema (4.1) se transforma en un problema de minimización.

Dado que el  $\log n$  es una constante es posible eliminarlo del problema, de esta manera aparece la nueva función objetivo:

$$W(\lambda) = \log (Z(\lambda)) - \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j.$$

Finalmente, se halla un problema de optimización equivalente y generalmente más sencillo<sup>2</sup>:

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} W(\lambda) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left( \log (Z(\lambda)) - \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j \right). \quad (4.4)$$

Para encontrar los puntos críticos de  $W(\lambda)$  se calcula su gradiente:

---

<sup>2</sup>Siempre que el número de restricciones  $m$  sea menor que el número de sucesos  $n$ .

$$\vec{\nabla} W = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Fijado un  $\lambda_k$ , su derivada parcial es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \lambda_k} &= \frac{1}{Z(\lambda)} \sum_{i=1}^n h_{ik} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right) - C_k \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{h_{ik} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right)}{\sum_{i=1}^n \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right)} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i h_{ik} - C_k \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [h_k] - C_k. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por lo tanto, los puntos críticos de  $W(\lambda)$  cumplirán:

$$\vec{\nabla} W = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_1] - C_1 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_2] - C_2 \\ \vdots \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_m] - C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 4.3. Distribuciones de Entropía Relativa Mínima (ERM)

En ocasiones es posible que tengamos una idea previa de cómo puede ser la función de probabilidad de los posibles sucesos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ; esta función de probabilidad  $q(x)$  será denominada *a priori*. El objetivo será encontrar la función de probabilidad *a posteriori*  $p(x)$  que cumpla las restricciones exigidas que más la asemeje a  $q(x)$ . En adelante se asume la siguiente nomenclatura:  $q(x_i) = q_i$  y  $p(x_i) = p_i$ .

En este caso el problema se transforma en el siguiente:

$$\min \left( \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i} \right), \tag{4.6}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n p_i h_{ij} &= C_j \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1.\end{aligned}\tag{4.7}$$

La solución es similar a la del problema anterior:

$$p_i = \frac{q_i}{Z(\lambda)} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right).$$

La única diferencia es la aparición de la función de probabilidad *a priori*. Si se escoge que  $q(x)$  sea la función de probabilidad de una distribución uniforme, es decir, que todos los eventos tengan el mismo peso  $1/n$ , entonces el problema se reduce a resolver (4.1) [10].

Como se mencionó previamente, esta definición de entropía relativa tiene ciertas características especiales. En primer lugar, la función de probabilidad *a posteriori* ha sido calibrada en base a las restricciones incluidas en las esperanzas. En segundo lugar, la función  $W(\lambda)$  es convexa, razón por la cual el mínimo, si existe, es único.

Para comprobar esta segunda propiedad, se calcula la matriz Hessiana, es decir, la matriz de las derivadas parciales de segundo orden  $\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_u \partial \lambda_k}$ , con  $u = 1, \dots, m$  y  $k = 1, \dots, m$ . Fijado un  $u$  y un  $k$  se tiene:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_u \partial \lambda_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_u} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_k] - C_k] = \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_k]}{\partial \lambda_u} = \frac{\partial}{\partial \lambda_u} \left( \sum_{i=1}^n p_i h_{ik} \right), \tag{4.8}$$

donde  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$  es la esperanza bajo la función de probabilidad *a posteriori*.

Si se sustituye (4.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial \lambda_u} \left( \frac{1}{Z(\lambda)} \sum_{i=1}^n h_{ik} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{Z(\lambda)^2} \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda_u} \left( \sum_{i=1}^n h_{ik} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right) \right) + \left( \frac{1}{Z(\lambda)} \sum_{i=1}^n h_{ik} h_{ij} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right) \right) =\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{Z(\lambda)} \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda_u} \left( \sum_{i=1}^n h_{ik} p_i \right) + \sum_{i=1}^n h_{ik} h_{iu} p_i = \\
&= -\frac{1}{Z(\lambda)} \left[ \sum_{i=1}^n h_{iu} \exp \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j h_{ij} \right) \right] \left( \sum_{i=1}^n h_{ik} p_i \right) + \sum_{i=1}^n h_{ik} h_{iu} p_i = \\
&= - \left( \sum_{i=1}^n h_{iu} p_i \right) \left( \sum_{i=1}^n h_{ik} p_i \right) + \sum_{i=1}^n h_{ik} h_{iu} p_i = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [h_u h_k] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [h_u] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [h_k].
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_u \partial \lambda_k} = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(h_u, h_k). \quad (4.9)$$

Por lo tanto, la matriz Hessiana coincide con la matriz de varianzas y covarianzas respecto a la función de probabilidad *a posteriori*,  $p$ , de las funciones  $h_j$ . Dicha matriz es definida positiva<sup>3</sup>, lo que implica que  $W(\lambda)$  es convexa.

El resultado (4.9) conduce a otra implicación relativa a la posibilidad de usar, a través de una regresión lineal<sup>4</sup>, las funciones  $h_j$  como interpoladores para calcular la esperanza bajo la función de probabilidad *a posteriori*  $p(x)$  de otra función  $f$  (distinta de las  $h_j$ ).

En concreto, los coeficientes de la regresión mencionada estan relacionados con la “sensibilidad” de la esperanza de  $f$  al cambio del valor de cada una de las restricciones  $C_j$ . El cálculo de dicha sensibilidad respecto a la restricción  $C_k$  es el siguiente:

$$\frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [f]}{\partial C_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [f]}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial C_k}. \quad (4.10)$$

Como se ha visto previamente en el desarrollo de (4.8):

---

<sup>3</sup>Todos sus autovalores son positivos.

<sup>4</sup>Dadas una variable  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  independiente y una variable  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  dependiente formando un conjunto de puntos  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , la recta de regresión trata de explicar la relación existente entre  $X$  e  $Y$  a través de una recta  $Y = \alpha + \beta X$ . A través del Método de Mínimos Cuadrados las expresiones que se obtienen para  $\alpha$  y  $\beta$  son:  $\alpha = \bar{y} - \beta \bar{x}$ ,  $\beta = \text{Cov}(X, Y) / \text{Cov}(X, X)$ . A  $\beta$  se le denomina “coeficiente de regresión”.

$$\frac{\partial C_k}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_k]}{\partial \lambda_j} = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(h_k, h_j).$$

De manera más genérica, si se hacen los cálculos para la esperanza de  $f$  bajo la función de probabilidad *a posteriori*, donde están directamente implicados los  $\lambda$ , se tiene:

$$\frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f]}{\partial \lambda_j} = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_j).$$

Si se calcula la sensibilidad para cada restricción:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f]}{\partial C_1} &= \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial C_1} + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_2) \frac{\partial \lambda_2}{\partial C_1} + \cdots + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_m) \frac{\partial \lambda_m}{\partial C_1} \\ \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f]}{\partial C_2} &= \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial C_2} + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_2) \frac{\partial \lambda_2}{\partial C_2} + \cdots + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_m) \frac{\partial \lambda_m}{\partial C_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f]}{\partial C_m} &= \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial C_m} + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_2) \frac{\partial \lambda_2}{\partial C_m} + \cdots + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h_m) \frac{\partial \lambda_m}{\partial C_m}. \end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\nabla_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f] = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h.) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial C_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial C_m} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial C_1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_2}{\partial C_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial C_1} & \frac{\partial \lambda_m}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial C_m} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Una propiedad que cumple la matriz jacobiana<sup>5</sup> es que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial f_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial f_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Por esta propiedad es correcto escribir (4.11) de la siguiente forma:

$$\nabla_C \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f] = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(f, h.) \cdot [\text{Cov}_{\mathbb{P}}(h., h.)]^{-1},$$

---

<sup>5</sup>Una matriz jacobiana es la matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una o varias funciones.

esto es, la sensibilidad de  $f$  a la variación de cada restricción  $C_j$  coincide con los coeficientes de regresión  $\beta_j$  de la función  $f$  con respecto a  $h_j$ , de modo que si se intenta descomponer  $f$  en función de las funciones  $h_j$ , se tiene que:

$$f = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j h_j = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f]}{\partial C_j} h_j. \quad (4.12)$$

De este desarrollo se sacan varias conclusiones:

- Es posible analizar las sensibilidades respecto a la variación de las restricciones a través de la función de probabilidad *a posteriori* obtenida al resolver el problema de ERM. Si se usa otra medida, es necesario perturbar las restricciones y recalcular las probabilidades para analizar la sensibilidad.
- En posible encontrar, en el caso de existir, una combinación lineal que replique la función  $f$  usando las  $h_j$ .

Por todas las propiedades vistas, queda justificado el uso de la entropía relativa como medida de la similitud entre dos funciones de probabilidad.

# Capítulo 5

## Montecarlo Ponderado

### 5.1. Método de Montecarlo

**Teorema 6. Teorema del límite central.** Sea  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mu$  y varianza  $0 < \sigma^2 < \infty$ . Entonces, si  $n$  es suficientemente grande, la variable aleatoria

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Se ha visto que la valoración por martingala expresa el precio de la opción como una esperanza matemática o, lo que es lo mismo, como una integral

$$\begin{aligned} V(S(0), t(0)) &= e^{-rT} \mathbb{E}_* [h(S(T))] = e^{-r(T)} \mathbb{E}_* \left[ h \left( x e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)} \right) \right] = \\ &= e^{-r(T)} \mathbb{E}_* \left[ h \left( x e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \sqrt{T}Y} \right) \right], \end{aligned}$$

donde  $Y \sim N(0, 1)$ . La esperanza se calcula para la probabilidad neutral al riesgo, por lo que se toma  $\mu = r$ .

El método de Montecarlo aproxima el precio de la opción siguiendo los siguientes pasos:

- Se generan  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  números aleatorios distribuidos según una distribución  $N(0, 1)$ .

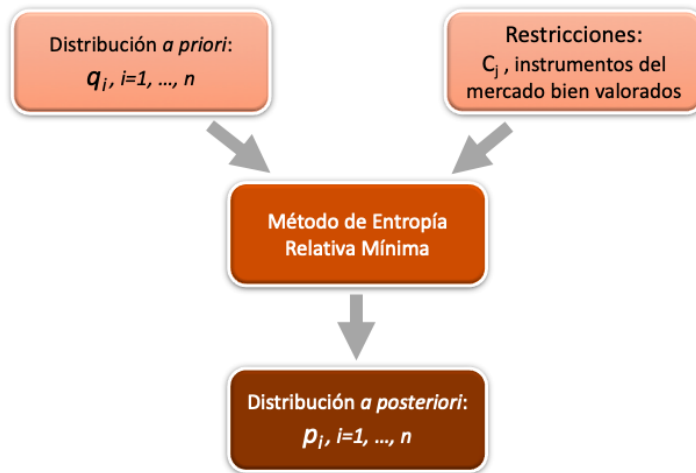
- Se calcula la aproximación

$$V(S(0), t(0)) \simeq \frac{1}{n} e^{-rT} \sum_{i=1}^n h \left( S(0) e^{(r - \frac{1}{2} \sigma^2)T + \sigma \sqrt{T} y_i} \right).$$

## 5.2. Método de Montecarlo Ponderado

Como se mostró anteriormente a través del ejemplo de las opciones digitales, para valorar correctamente una opción en un mercado con *smile* donde existan más opciones es necesario incorporar en la valoración la influencia del *smile* de volatilidad (de otro modo, la realidad se “reiría” de la teoría). Para incorporar dicha influencia se emplea la técnica denominada *Weighted Montecarlo* (WMC) o Montecarlo Ponderado que usa el método de ERM para dar más peso a escenarios extremos.

De manera esquemática, el método a seguir es el siguiente [4]:



Cuadro 5.1: Esquema de la metodología WMC

Dado que no se sabe si algunos escenarios prevalecen sobre otros (Principio de Indiferencia), la función de probabilidad *a priori* será la de una distribución uniforme que otorga a todos los escenarios del mercado la misma probabilidad. Para incorporar el *smile* añadimos  $j$  restricciones que exijan que el valor esperado actual del instrumento  $j$ -ésimo en los distintos estados

del mercado se corresponda con su valor de mercado  $C_j$ , es decir, se hacen restricciones sobre los momentos de la distribución *a posteriori*. Sean

- $q_i$  la probabilidad *a priori* del suceso  $x_i$ .
- $p_i$  la probabilidad *a posteriori* del suceso  $x_i$ .
- $C_j$  los precios de referencia de ciertos instrumentos del mercado.
- $h_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , la función de pagos del instrumento  $j$ -ésimo a lo largo del suceso  $i$ -ésimo. A estos instrumentos se les denomina “instrumentos de referencia”.

Incorporando las restricciones en las esperanzas de los instrumentos de referencia se exige que la función de probabilidad  $p(x)$  evalúe correctamente dichos instrumentos de acuerdo con su precio actual en el mercado  $C_j$ . Por lo tanto, incluir restricciones implica cambiar la función de probabilidad  $q(x)$ .

Una vez establecida la función de probabilidad *a priori* y las restricciones, se aplica el método de Entropía Relativa Mínima explicado en el capítulo anterior y se obtiene la función de probabilidad *a posteriori*.

¿Qué características tiene esta función de probabilidad?

- Es la función de probabilidad que más se asemeja a la función de probabilidad *a priori* y maximiza la entropía.
- Incorpora la influencia del *smile* a través de las restricciones en las esperanzas, por lo que es apropiado usarla para valorar otro tipo de instrumentos financieros.
- Valora correctamente todos los instrumentos de referencia.
- Gracias a la propiedad (4.9), puede usarse para calcular la sensibilidad a los movimientos en los precios de los instrumentos de referencia.
- Es posible encontrar, en el caso de que exista, una cobertura perfecta de un instrumento a través de la combinación de los instrumentos de referencia.

## Capítulo 6

# Aplicación Práctica: cuantificación del riesgo de modelo

A continuación se aplica toda la teoría explicada a un caso práctico. La muestra consiste en precios (correspondientes con datos de mercado tomados a fecha 15/07/2013) de opciones europeas sobre el Índice DJ EURO STOXX 50<sup>1</sup> con vencimiento el 19 de diciembre de 2014 y *strikes* que figuran en el Apéndice B.1.

Spot	Forward ( $F$ )	Tipo de interés ( $r$ )	Volatilidad ( $\sigma$ )	Vencimiento ( $T$ )
2809.58	2663.2321	0.33 %	20 %	1.5973 años

Cuadro 6.1: Datos para la valoración en  $t = 0$

El objetivo es cuantificar el riesgo de modelo que surge al valorar una opción digital sin tener en cuenta suficientes instrumentos de referencia en dicha valoración.

Se fijan cuatro instrumentos de mercado: tres opciones europeas y el activo

---

<sup>1</sup>Es un índice bursátil que representa el rendimiento de las 50 empresas más grandes de países de la eurozona.

subyacente  $S$  determinado por el *forward*.

	Call / Put	Strike	Precio Mercado
$S$	Call	0	2649.16
$I_1$	Put	2500	206.14
$I_2$	Put	2650	269.28
$I_3$	Call	2800	209.50

Cuadro 6.2: Instrumentos de referencia

Es obligatorio incluir  $S$  en la valoración porque es necesario que en el WMC sea martingala y porque el *forward* es el instrumento más líquido del mercado, por este motivo  $S$  debe ser valorado siempre correctamente. Pero en este ejemplo cuando se hable de un número  $k$  de restricciones incorporadas se entenderá que son  $k$  restricciones además de  $S$ . Por su parte, el futuro puede expresarse como una opción *call* de *strike* nulo.

Se llamará “cartera de referencia” al conjunto de instrumentos que se van a valorar con las distintas metodologías, WMC y Método Black-Scholes, con o sin *smile*.

Durante este ejercicio, la cartera de referencia  $V_R$  estará compuesta por 200 opciones digitales cuyo *payoff* es  $C = 100$ , si el precio del subyacente queda por encima del *strike* ( $K = 2600$ ).

$$V_D(T) = \begin{cases} 100 & \text{si } S(T) > 2600 \\ 0 & \text{si } S(T) \leq 2600. \end{cases}$$

Siguiendo la metodología desarrollada por Abasto [1], las diferencias de valor de la cartera de referencia mostrarán una cuantificación del riesgo de modelo.



## 6.1. Escenarios Reales

### Escenario 0

Este escenario será el más sencillo por ser el escenario en el que no hay *smile* de volatilidad o hay lo que se llama *smile* plano. Tal es el mundo de Black-Scholes.

$\sigma_1^0$	$\sigma_2^0$	$\sigma_3^0$
20 %	20 %	20 %

Cuadro 6.3: Escenario 0

Se calcula el valor de cartera de referencia en este escenario.

$$V_R(0) = 200 \cdot V_D(0) = 200 \cdot C \cdot N(d_-) \cdot e^{-rT} = 200 \cdot 48,49 = 9698,89. \quad (6.1)$$

Nótese que el precio corriente de mercado del subyacente (*spot*) no es el que debe incluirse en el cálculo de  $d_-$ , ya que incluye dividendos. El  $S(0)$  que debe utilizarse es el precio del *forward* descontado al tipo de interés libre de riesgo, esto es:

$$S(0) = F(0)e^{-rT} = 2649,23.$$

Por otro lado, se valoran por Black-Scholes las opciones sobre el Índice DJ EURO STOXX 50 con los *strikes* escogidos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Valoración MBS
$I_1^{MBS}$	185.08
$I_2^{MBS}$	259.24
$I_3^{MBS}$	210.56

Cuadro 6.4: Valoración por MBS

Como se comprueba, existen grandes diferencias entre estos valores y aquellos de mercado. En efecto, al haber sido valoradas por Black-Scholes no incorporan efecto del *smile* de volatilidad<sup>2</sup>.

## Escenario 1

En esta valoración se usa el Método de WMC. Se incluye una sola restricción  $I_1$ , cuya volatilidad implícita es 21,7 %. Por lo tanto, el *smile* de volatilidad en este escenario estará definido por las siguientes volatilidades:

$\sigma_1^1$	$\sigma_2^1$	$\sigma_3^1$
21.7 %	20 %	20 %
↑	=	=

Cuadro 6.5: Escenario 1

En este escenario ha aumentado  $\sigma_1^1 > \sigma_1^0$  y se han dejado fijas  $\sigma_2^1 = \sigma_2^0$  y  $\sigma_3^1 = \sigma_3^0$ . La tercera fila de la tabla mostrará a partir de ahora el aumento, la permanencia o la disminución de las volatilidades respecto a las del escenario 0.

En este caso ya existe el *smile* (una linea quebrada), razón por la que será necesario usar Montecarlo Ponderado para recoger en la valoración de la cartera de referencia el efecto que tiene la incorporación de la restricción  $I_1$ . Se calcula entonces la nueva función de probabilidad y se valora con ella la opción digital. De manera que

$$V_R(0) = 200 \cdot 47,78 = 9556,76.$$

---

<sup>2</sup>Puede comprobarse que si se invierte la fórmula para hallar la volatilidad implícita, en los tres casos se obtiene el mismo valor  $\sigma = 20\%$ , aunque puede existir una diferencia mínima debido a que el valor se obtiene a través de una aproximación numérica.

## Escenario 2

En este escenario, la restricción incorporada será solamente  $I_3$  cuya volatilidad implícita es 19,9%. El escenario 2 estará definido por las siguientes volatilidades:

$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_3^2$
20 %	20 %	19.9 %
=	=	↓

Cuadro 6.6: Escenario 2

A través del Método de WMC se calcula la nueva función de probabilidad (que valorará correctamente  $I_1$ ) y se valora con ella la opción digital, de manera que

$$V_R(0) = 200 \cdot 48,42 = 9685,97.$$

## Escenario 3

En el escenario 3 se incorporan dos restricciones:  $I_1$ , ya especificada, e  $I_2$ , cuyas volatilidad es 20,7%. Se obtiene, pues, la siguiente tabla:

$\sigma_1^3$	$\sigma_2^3$	$\sigma_3^3$
21.7 %	20.7 %	20 %
↑	↑	=

Cuadro 6.7: Escenario 3

Se calcula la nueva función de probabilidad y se valora con ella la opción digital, de manera que:

$$V_R(0) = 200 \cdot 56,49 = 11298,47.$$

## Escenario 4

Finalmente, se incluyen las tres opciones  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . En este caso el *smile* será estrictamente decreciente:

$\sigma_1^4$	$\sigma_2^4$	$\sigma_3^4$
21.7 %	20.7 %	19.9 %
↑	↑	↓

Cuadro 6.8: Escenario 4

Se calcula la nueva función de probabilidad y se valora con ella la opción digital, de manera que:

$$V_R(0) = 200 \cdot 56,53 = 11306,41.$$

## 6.2. Escenarios Ficticios

Hasta ahora todos los cálculos se han realizado según datos reales. Sin embargo, el *smile* podría comportarse de otra forma, podría ser creciente o ser una curva cuadrática. Para analizar estos casos, se modifican manualmente los valores que toman las volatilidades para generar el *smile* deseado. Al modificar las volatilidades, se modificarán los precios de las opciones, razón por la cual ya no se estarán usando datos reales sino ficticios.

## Escenario 5

Este caso intenta reflejar el valor que tomaría la cartera de referencia en el caso de que el *smile* forme una parábola.

$\sigma_1^5$	$\sigma_2^5$	$\sigma_3^5$
21.7 %	20.7 %	21.3 %
↑	↑	↑

Cuadro 6.9: Escenario 5

Al haber modificado artificialmente  $\sigma_3$ , el precio de la *call*, cuyo *strike* sería 2800 pasaría a ser 227,86.

Si se valora con estos datos el valor de la cartera de referencia, se obtiene:

$$V_R(0) = 200 \cdot 56,41 = 11283,18.$$

## Escenario 6

Éste es el escenario en el que el *smile* es creciente.

$\sigma_1^6$	$\sigma_2^6$	$\sigma_3^6$
19.9 %	20.3 %	21.3 %
↓	↑	↑

Cuadro 6.10: Escenario 6

Al haber modificado  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respecto al escenario anterior, el precio de la *put* de *strike* = 2500 pasaría a ser 183,86 y el de la de *strike* = 2650 sería 263,20.

Si se valora con estos datos la opción digital, se obtiene el valor de la cartera de referencia:

$$V_R(0) = 200 \cdot 44,66 = 8933,65.$$

### 6.3. Cuantificación del riesgo

El valor de la cartera de referencia varía, pues, conforme cambian los escenarios:

Escenario	$V_R(0)$
0	9698.89
1	9556.76
2	9685.97
3	11298.47
4	11306.41
5	11283.18
6	8933.65

Cuadro 6.11: Valoraciones de la cartera de referencia

Una vez obtenidas las diferentes valoraciones, interesa establecer un criterio para cuantificar el riesgo de modelo que surge al incluir en la valoración unos instrumentos de referencia u otros. El siguiente cuadro muestra las diferencias absolutas entre las valoraciones obtenidas:

Escenario	0	1	2	3	4	5	6
0	0						
1	142	0					
2	13	129	0				
3	1600	1742	1613	0			
4	1608	1750	1620	8	0		
5	1584	1726	1597	15	23	0	
6	765	623	752	2365	2373	2350	0

Cuadro 6.12: Diferencias absolutas entre valoraciones

Dado que los datos usados en los escenarios 5 y 6 no se han tomado del mercado, sino que han sido modificados artificialmente para mostrar el efecto de otros tipos de *smile*, es conveniente centrarse en primer lugar en los escenarios 0, 1, 2, 3 y 4.

Si se analiza el cuadro anterior, es posible discriminar dos grupos de escenarios reales:

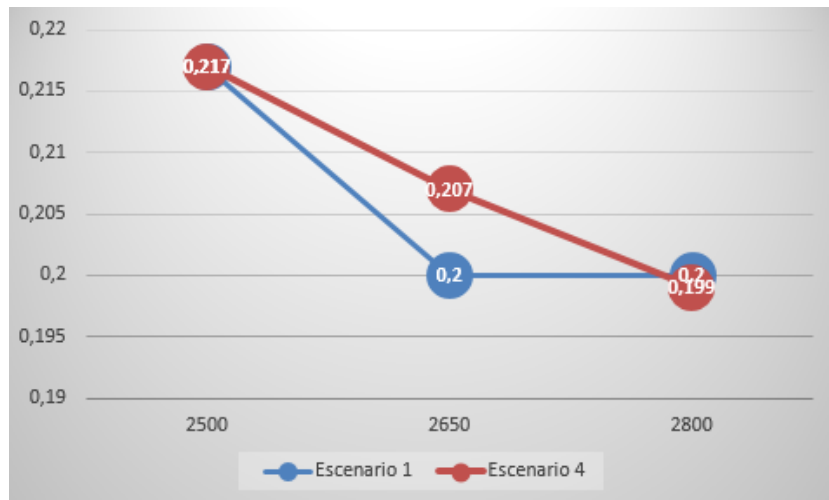
- Grupo 1: escenarios 0, 1 y 2. Aquí las diferencias en la valoración de la cartera de referencia son, como puede comprobarse, pequeñas. Esto significa que valorar con Black-Scholes o valorar incorporando una sola restricción no supone una gran diferencia en términos de riesgo.
- Grupo 2: escenarios 3 y 4. En este nivel, las diferencias en la valoración de la cartera de referencia con respecto al grupo anterior son muy altas. Esto significa que ignorar el *smile* (o incorporar sólo una restricción) conlleva un alto riesgo. Sin embargo, la diferencia entre las valoraciones de los escenarios 3 y 4 es muy pequeña (8). Y esto significa que al incluir dos restricciones mediante el WMC se recoge gran parte del efecto del *smile*, lo que tiene sentido en este ejemplo que tiene un *smile* decreciente. Pero, en general, el *smile* debe ser recogido incluyendo al menos tres restricciones.

La diferencia más grande se encuentra al comparar la valoración por WMC hallada al usar sólo la restricción  $I_1$  (escenario 1) y la valoración por WMC hallada al incorporar todas las restricciones (escenario 4).

$$|\text{Escenario 1} - \text{Escenario 4}| = 1750\text{€}.$$

De esta manera es posible cuantificar el riesgo de valorar mal la cartera de referencia usada.

Obviando la escala, pero respetando el orden, se muestran los *smiles* de ambos escenarios en la siguiente figura:

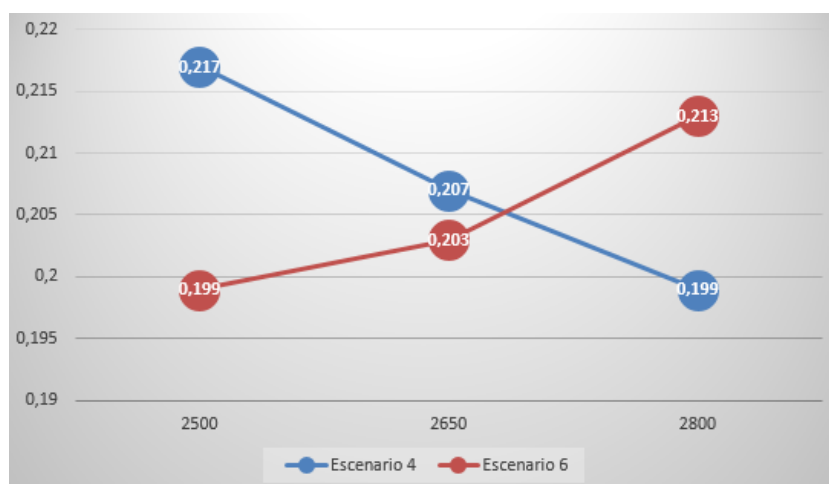


Cuadro 6.13: *Smile* escenario 1 vs. *smile* escenario 4

En segundo lugar, se añaden los escenarios ficticios 5 y 6.

Intuitivamente cabría pensar que el mayor riesgo de modelo (la mayor diferencia de valoración) debería resultar de los dos escenarios que son más opuestos, es decir, el del *smile* estrictamente decreciente (escenario 4) y el del *smile* creciente (escenario 6). Y, efectivamente, si se comprueban los valores de la tabla se observa que el valor (de riesgo de modelo) más alto lo identifican los escenarios 4 y 6.

$$|\text{Escenario 4} - \text{Escenario 6}| = 2373\text{€}.$$



Cuadro 6.14: *Smile* escenario 4 vs. *smile* escenario 6



## 6.4. Conclusiones

En esta aplicación práctica, se propone una metodología para cuantificar el riesgo de modelo que conlleva la valoración de un mismo instrumento a través de varias medidas de probabilidad válidas y se aplica dicha metodología en la cuantificación del riesgo de modelo derivado de la valoración de una opción digital.

Extrapolando los resultados concretos obtenidos puede afirmarse que, en el caso de que el *smile* en el mercado sea decreciente y, como en este caso, con una curvatura reducida, es suficiente con incorporar dos instrumentos del mercado para recoger el efecto del *smile*. Esto sería verdad también en el caso de que el *smile* fuese creciente y con poca curvatura. Presumiblemente, puede afirmarse que si la curvatura fuese muy acentuada o el *smile* fuese parabólico, sería necesario incorporar en la valoración al menos un tercer instrumento porque, si bien dos puntos definen una recta, son necesarios al menos tres puntos para definir una curva.

Se ha visto que al añadir más instrumentos de referencia en la valoración se incorpora más información sobre el mercado. Es fácil suponer que llegará un punto en el que incluir un instrumento más de referencia en la valoración no aportará información o aportará una información mínima.

En base a la metodología propuesta, sería interesante construir un algoritmo que fuese incorporando, uno a uno, los instrumentos en la valoración para hacerla cada vez más precisa, hasta llegar al momento en el que incluir un nuevo instrumento en la misma fuese redundante. En efecto, el riesgo de modelo derivado de la comparación entre los dos últimos casos proporcionados por el algoritmo debería ser aproximadamente cero.

# Apéndice A

## Código Python

```
1 from datetime import datetime
2 import numpy as np
3 from scipy.optimize import minimize, fsolve, least_squares
4 import math
5 import pandas as pd
6 import scipy.stats as si
7 import sympy as sy
8 import statistics as st
9
10
11 # ----- Funciones Basicas -----
12
13 def time_between(maturity, time0):
14     """
15     :param maturity: fecha de vencimiento en formato yyyy-mm-dd
16     :param time0: fecha actual en formato yyyy-mm-dd
17     :return: tiempo entre time0 y maturity en terminos
18     anuales
19     """
20     maturity = datetime.strptime(maturity, "%Y-%m-%d")
21     time0 = datetime.strptime(time0, "%Y-%m-%d")
22     return abs((maturity - time0).days)/365
23
24 def discount_factor(interest_rate, time):
25     """
26     :param interest_rate: tipo de interes
27     :param time: tiempo hasta el vencimiento
28     :return: factor de descuento
29     """
30     return math.exp(-interest_rate * time)
31
```

```

32
33 # ----- PRECIO SUBYACENTE (SIN DIVIDENDOS)
34     -----
35 def forward_actualizado(forward, interest_rate, time):
36     """
37     :param forward: precio del forward de vencimiento time
38     :param interest_rate: tipo de interes
39     :param time: tiempo hasta el vencimiento
40     :return: Valor actualizado del forward (lo que
41     denominamos S(0)
42     """
43     disc_factor = discount_factor(interest_rate, time)
44     return forward*disc_factor
45
46 # ----- Simulacion de trayectorias -----
47
48 def stock_simulations(S, mu, sigma, time, iteraciones):
49     """
50     :param price: precio del subyacente en t = 0
51     :param mu: media estimada
52     :param sigma: varianza estimada
53     :param time: tiempo
54     :param dt: longitud de la simulacion, numero de
55     intervalos de subdivision del tiempo
56     :return: simulacion de la evolucion del precio del
57     subyacente
58     """
59     stock = []
60     for intervalo in range(0, iteraciones -1):
61         Y = np.random.normal(0, 1)
62         price = S * math.exp((mu - (sigma ** 2) / 2) * time +
63         sigma * np.sqrt(time) * Y)
64         stock.append(price)
65     stock = pd.DataFrame(data=stock, columns=['Precios'])
66     return stock
67
68 # ---- BLACK-SCHOLES y VOLATILIDAD IMPLICITA ----
69
70 def european_payoff(price, strike):
71     """
72     max(S-K), se multiplicara por 1 cuando corresponda con
73     una Call europea y por -1 cuando corresponda con una Put
74     :param price: lista con los precios que toma el
75     subyacente en cada simulacion

```

```

74     :param strike: precio de ejercicio
75     :return: valor funcion de pagos de la call
76     """
77     return [max(price[n] - strike, 0) for n in range(0, len(
price))]
78
79
80 def european_BS_valuation(option_type, S, K, T, r, sigma):
81     """
82     :param option_type: call or put
83     :param S: forward price
84     :param K: strike price
85     :param T: time to maturity
86     :param r: interest rate
87     :param sigma: volatility of underlying asset
88     :return: price of european option
89     """
90
91     d1 = (np.log(S / K) + (r + (1 / 2) * sigma ** 2) * T) / (
sigma * np.sqrt(T))
92     d2 = (np.log(S / K) + (r - (1 / 2) * sigma ** 2) * T) / (
sigma * np.sqrt(T))
93
94     if option_type == 1:
95         return S * si.norm.cdf(d1, 0.0, 1.0) - K * np.exp(-r
* T) * si.norm.cdf(d2, 0.0, 1.0)
96     elif option_type == -1:
97         return K * np.exp(-r * T) * si.norm.cdf(-d2, 0.0,
1.0) - S * si.norm.cdf(-d1, 0.0, 1.0)
98     else:
99         print('Incorrect option type')
100
101
102 def implied_volatility(option_type, S, K, T, r,
valuation_price):
103     """
104     :param option_type: 1 si es una call y -1 si es una put
105     :param S: Precio actual del subyacente
106     :param K: strike
107     :param T: tiempo al vencimiento
108     :param r: tipo de interes libre de riesgo
109     :param valuation_price: precios de la opcion
110     :return: price of european call option
111     """
112     start_value = 0.2
113
114     if option_type == 1:
115         def BS_call(sigma):
116             return valuation_price - (

```

```

117         S * si.norm.cdf((np.log(S / K) + (r +
118             (1 / 2) * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T)), 0.0,
119             1.0) - K * np.exp(-r
120 * T) * si.norm.cdf(
121             (np.log(S / K) + (r - (1 / 2) * sigma **
122             2) * T) / (sigma * np.sqrt(T)), 0.0, 1.0))
123     return least_squares(BS_call, start_value, bounds=(0,
124         500)).x
125 elif option_type == -1:
126     def BS_put(sigma):
127         return valuation_price - (K * np.exp(-r * T) * si
128             .norm.cdf(
129                 -(np.log(S / K) + (r - (1 / 2) * sigma ** 2)
130 * T) / (sigma * np.sqrt(T)), 0.0, 1.0) - S * si.norm.cdf(
131                 -(np.log(S / K) + (r + (1 / 2) * sigma ** 2)
132 * T) / (sigma * np.sqrt(T)), 0.0, 1.0))
133     return least_squares(BS_put, start_value, bounds=(0,
134         500)).x
135 else:
136     print('Incorrect option type')
137
138 def payoff_digital(prices, strike, C):
139     """
140     max(S-K), se multiplicara por 1 cuando corresponda con
141     una Call europea y por -1 cuando corresponda con una Put
142     :param price: lista de precios que toma el subyacente en
143     cada simulacion
144     :param strike: precio de ejercicio
145     :param C: valor a pagar si el precio supera al strike (
146     acordado por contrato)
147     :return: valor funcion de pagos de la call
148     """
149     return [C if prices['Precios'][n] > strike else 0 for n
150         in range(0, len(prices))]
151
152 def digital_BS_valuation(S, K, sigma, r, T, C):
153     """
154     :param S: Precio actual del subyacente
155     :param K: strike
156     :param sigma: volatilidad del subyacente
157     :param r: tipo de interes libre de riesgo
158     :param T: tiempo al vencimiento
159     :param C: payoff acordado si el precio final del
160     subyacente esta por encima de K
161     :return: valoracion por Black-Scholes
162     """
163     d = (np.log(S / K) + (r - (1 / 2) * sigma ** 2) * T) / (

```

```

sigma * np.sqrt(T))
153     valoracion = C*si.norm.cdf(d, 0.0, 1.0)*math.exp(-r*T)
154     return valoracion
155
156
157 # ----- ERM -----
158
159
160 def discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices, strikes,
161     interest_rate, time):
162     """
163     :param portfolio: array con 1 (si es una call) o -1 si es
164     una put, ejemplo: [1, -1, 1] = [call, put, call]
165     :param prices: prices simulados con la funcion '
166     simulations()'
167     :param strikes: price de ejercicio de los instrumentos
168     que exigimos que esten bien valorados, el futuro del
169     subyacente lo tomamos como una call con strike = 0 y es
170     una restriccion obligatoria por ser el instrumento mas
171     liquido
172     :return: genera las g_ij para j opciones
173     """
174     payoff_simulations = []
175     discount = discount_factor(interest_rate, time)
176     if sum(map(abs, portfolio)) == len(portfolio):
177         for ind in range(0, len(portfolio)):
178             if portfolio[ind] in (1, -1):
179                 payoff_simulations.append(np.dot(discount,
180                     european_payoff(portfolio[ind] * prices['Precios'],
181                     portfolio[ind] * strikes[ind])))
182             else:
183                 payoff_simulations.append('Error: funcion de
184                 pagos con strike ' + str(strikes[ind]) + ' no identificada
185                 ')
186     return payoff_simulations
187
188
189 def z_lambda(discounted_values, lambda_vector):
190     """
191     :param discounted_values: funcion de pagos descontada de
192     las opciones
193     :param lambda_vector: lambdas
194     :return: factor normalizador
195     """
196     return sum(np.exp(np.transpose(discounted_values) @ np.
197         transpose(lambda_vector)))
198
199
200 def w_lambda(lambda_vector, disc_values, market_prices):

```

```

189     """
190     :param lambda_vector: lambdas
191     :param disc_values: valores de la funcion de pagos
192     descontada de cada opcion para cada simulacion
193     :param market_prices: precios de mercado asociados a cada
194     strike
195     :return: funcion objetivo del problema de minimizacion
196     """
197     Z = z_lambda(disc_values, lambda_vector)
198     return np.log(Z) - (lambda_vector @ np.transpose(
199     market_prices))
200
201 def minimize_solution(disc_values, market_prices):
202     """
203     :param disc_values: valores de la funcion de pagos
204     descontada de cada opcion para cada simulacion
205     :param market_prices: precios de mercado asociados a cada
206     strike
207     :return: vector de lambdas que minimiza la funcion
208     objetivo
209     """
210     starting_lambda = np.zeros(len(market_prices))
211     return minimize(w_lambda, starting_lambda, args=(
212     disc_values, market_prices,), method='Nelder-Mead',
213     options={'xtol': 1e-6, 'disp': True}).x
214
215 def probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas):
216     """
217     :param disc_values: valores de la funcion de pagos
218     descontada de cada opcion para cada simulacion
219     :param min_lambdas: vector de lambdas que minimiza la
220     funcion objetivo
221     :return: probabilidades ponderadas
222     """
223     sumprod = np.transpose(disc_values) @ np.transpose(
224     min_lambdas)
225     Z = z_lambda(disc_values, min_lambdas)
226     prob_ind = np.exp(sumprod)/Z
227     return prob_ind
228
229 def valuation_WMC(disc_values, strikes_list):
230     """
231     :param disc_values: valores de la funcion de pagos
232     descontada de cada opcion para cada simulacion
233     :return: valoracion de la opcion por el metodo de
234     Weighted Monte Carlo

```

```

226     """
227     probs = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
228     mult = probs * disc_values
229     wmc_valuation = []
230     for ind in range(0, len(mult)):
231         wmc_valuation.append(sum(mult[ind]))
232     return pd.DataFrame(data=wmc_valuation, index=
strikes_list, columns=['Valoracion'])
233
234
235 def valuation_MC(disc_values, strikes_list):
236     """
237     :param disc_values: funcion de pagos de cada simulacion
descontada
238     :param strikes_list: strikes que estamos teniendo en
cuenta
239     :return: valoracion de las opciones por el Metodo de
Montecarlo
240     """
241     mc_prices = []
242     for ind in range(0, len(disc_values)):
243         solution = st.mean(disc_values[ind])
244         mc_prices.append(solution)
245     return pd.DataFrame(data=mc_prices, index=strikes_list,
columns=['Valoracion'])
246
247
248 def smile(portfolio, option_prices, strikes, T, r, S):
249     """
250     :param portfolio: lista con posiciones de compra(call) =
1 o de venta(put) = -1
251     :param option_prices: valores de las opciones que forman
el portfolio
252     :param strikes: lista de strikes asociados a las opciones
253     :param T: tiempo hasta vencimiento
254     :param r: tipo de interes libre de riesgo
255     :param S: valor actual del subyacente
256     :return: lista de volatilidades implícitas asociadas
257     """
258     volatilities = []
259     for ind in range(0, len(strikes)):
260         if strikes[ind] == 0:
261             volatilities.append(np.infty)
262         else:
263             sigma = implied_volatility(portfolio[ind], S,
strikes[ind], T, r, option_prices[ind])
264             volatilities.append(sigma)
265     return pd.DataFrame(data=volatilities, index=strikes,
columns=['Volatilidad Implicita'])

```



## Apéndice B

### Ejecución de la aplicación práctica

#### B.1. Índice DJ EURO STOXX 50

Call / Put	Strike	Precio Mercado	Vencimiento
Put	2300	139.16	19/12/2014
Put	2350	152.53	19/12/2014
Put	2400	168.40	19/12/2014
Put	2450	186.64	19/12/2014
Put	2500	206.14	19/12/2014
Put	2550	224.50	19/12/2014
Put	2600	245.51	19/12/2014
Put	2650	269.28	19/12/2014
Call	2700	258.10	19/12/2014
Call	2750	232.45	19/12/2014
Call	2800	209.50	19/12/2014
Call	2850	189.51	19/12/2014
Call	2900	170.59	19/12/2014
Call	2950	150.94	19/12/2014
Call	3000	134.04	19/12/2014
Call	3050	119.77	19/12/2014

Cuadro B.1: Precio de mercado de opciones europeas

## B.2. Código de la aplicación práctica

```
1 time0 = '2013-05-15'
2 maturity = '2014-12-19'
3 T = time_between(maturity, time0)
4
5
6 M1 = 206.14
7 M2 = 269.28
8 M3 = 209.4970
9
10 K1 = 2500
11 K2 = 2650
12 K3 = 2800
13
14 call = 1
15 put = -1
16
17 F = 2663.2321
18 r = 0.0033
19 sigma = 0.2
20 C = 100
21 K_D = 2600
22 S = forward_actualizado(F, r, T)
23
24
25 # ----- simulacion de 10.000 precios -----
26
27 prices = stock_simulations(S, r, sigma, T, 10000)
28
29
30 # ----- ESCENARIO 0 -----
31
32 digital_0 = digital_BS_valuation(S, K_D, sigma, r, T, C)
33
34 portfolio = [put, put, call]
35 strikes = [K1, K2, K3]
36
37 I_BS_1 = european_BS_valuation(portfolio[0], S, strikes[0], T
38                                , r, 0.20)
39 I_BS_2 = european_BS_valuation(portfolio[1], S, strikes[1], T
40                                , r, 0.20)
41 I_BS_3 = european_BS_valuation(portfolio[2], S, strikes[2], T
42                                , r, 0.20)
43
44 precios_bs = [I_BS_1, I_BS_2, I_BS_3]
45 smile_BS = smile(portfolio, precios_bs, strikes, T, r, S)
```

```

45 # ----- ESCENARIO 1 -----
46
47
48 portfolio = [call, put]
49 market_prices = [S, M1]
50 strikes = [0, K1]
51
52 sigma_1 = implied_volatility(portfolio[1], S, strikes[1], T,
53                               r, market_prices[1])
54
55 disc_values = discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices,
56                                             strikes, r, T)
57 min_lambdas = minimize_solution(disc_values, market_prices)
58 funcion_prob = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
59
60 digital_pay = payoff_digital(prices, K_D, C)
61 digital_1 = sum(np.dot(discount_factor(r, T), digital_pay)*
62                funcion_prob)
63
64 # ----- ESCENARIO 2 -----
65
66 portfolio = [call, call]
67 market_prices = [S, M3]
68 strikes = [0, K3]
69
70 sigma_3 = implied_volatility(portfolio[1], S, strikes[1], T,
71                               r, market_prices[1])
72
73 disc_values = discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices,
74                                             strikes, r, T)
75 min_lambdas = minimize_solution(disc_values, market_prices)
76 funcion_prob = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
77
78 digital_pay = payoff_digital(prices, K_D, C)
79 digital_2 = sum(np.dot(discount_factor(r, T), digital_pay)*
80                funcion_prob)
81
82 # ----- ESCENARIO 3 -----
83
84 portfolio = [call, put, put]
85 market_prices = [S, M1, M2]
86 strikes = [0, K1, K2]
87
88 sigma_2 = implied_volatility(portfolio[2], S, strikes[2], T,
89                               r, market_prices[2])
90
91 disc_values = discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices,

```

```

        strikes, r, T)
87 min_lambdas = minimize_solution(disc_values, market_prices)
88 funcion_prob = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
89
90 digital_pay = payoff_digital(prices, K_D, C)
91 digital_3 = sum(np.dot(discount_factor(r, T), digital_pay)*
        funcion_prob)
92
93
94 # ----- ESCENARIO 4 -----
95
96 portfolio = [call, put, put, call]
97 market_prices = [S, M1, M2, M3]
98 strikes = [0, K1, K2, K3]
99
100 disc_values = discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices,
        strikes, r, T)
101 min_lambdas = minimize_solution(disc_values, market_prices)
102 funcion_prob = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
103
104 digital_pay = payoff_digital(prices, K_D, C)
105 digital_4 = sum(np.dot(discount_factor(r, T), digital_pay)*
        funcion_prob)
106
107
108 # ----- ESCENARIO 5 -----
109
110 sigma_ficticia_3 = 0.213
111 BS3 = european_BS_valuation(1, S, 2800, T, r,
        sigma_ficticia_3)
112
113 portfolio = [call, put, put, call]
114 market_prices = [S, M1, M2, BS3]
115 strikes = [0, K1, K2, K3]
116
117 disc_values = discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices,
        strikes, r, T)
118 min_lambdas = minimize_solution(disc_values, market_prices)
119 funcion_prob = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
120
121 digital_pay = payoff_digital(prices, K_D, C)
122 digital_5 = sum(np.dot(discount_factor(r, T), digital_pay)*
        funcion_prob)
123
124
125 # ----- ESCENARIO 6 -----
126
127 sigma_ficticia_1 = 0.199
128 sigma_ficticia_2 = 0.203

```

```

129 BS1 = european_BS_valuation(-1, S, 2500, T, r,
    sigma_ficticia_1)
130 BS2 = european_BS_valuation(-1, S, 2650, T, r,
    sigma_ficticia_2)
131
132 portfolio = [call, put, put, call]
133 market_prices = [S, BS1, BS2, BS3]
134 strikes = [0, K1, K2, K3]
135
136 disc_values = discounted_portfolio_payoffs(portfolio, prices,
    strikes, r, T)
137 min_lambdas = minimize_solution(disc_values, market_prices)
138 funcion_prob = probabilities_WMC(disc_values, min_lambdas)
139
140 digital_pay = payoff_digital(prices, K_D, C)
141 digital_6 = sum(np.dot(discount_factor(r, T), digital_pay)*
    funcion_prob)

```

### B.2.1. Notación de los elementos

Forward	Tipo de interés	Volatilidad
F	r	sigma
15/05/2013	19/12/2014	Vencimiento
time0	maturity	T
Precio Mercado $I_1$	Precio Mercado $I_2$	Precio Mercado $I_3$
M1	M2	M3
Strike $I_1$	Strike $I_2$	Strike $I_3$
K1	K2	K3
C (digital)	Strike digital	S(0)
C	$K_D$	S

# Bibliografía

- [1] ABASTO, D. y KUST, M., «Model01: Quantifying the Risk of Incremental Model Changes», September 2014. SSRN-id24933056.
- [2] ARRIETA, D., *Análisis Funcional y Teoría de la Medida en Matemática Financiera: Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos*, Trabajo de Fin de Máster en Matemáticas Avanzadas, Facultad de Ciencias, UNED, 2016.
- [3] ARRIETA, D., *Entropía relativa y cobertura de derivados*, tesis doctoral, UCM, Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I, 2013.
- [4] ARRIETA, D., «Minimum Relative Entropy and Cliquet Hedging», en *Wilmott Magazine*, July 2015, pp. 71-81.
- [5] AVELLANEDA, M., «Minimum-Relative-Entropy calibration of Asset-Pricing Models», en *International Journal of Theoretical and Applied Finance* Vol.1 No.4, 1998, pp. 447-472.
- [6] AVELLANEDA, M., BUFF, R., FRIEDMAN, C., GRANDECHAMP, N., KRUK, L. y NEWMAN, J., «Weighted Monte Carlo: A New Technique for Calibrating Asset Pricing Models», en *Int. J. Theor. App. Finance* Vol.4 No.1, 2001, pp.91-119.
- [7] BRIGO, D., «Nonlinear valuation and XVA under credit risk, collateral margins and Funding Costs», Doctoral course, Université Catholique de Louvain, 2015.
- [8] CARRILLO, S., *Conceptos básicos de probabilidad*, UAM, 2008.
- [9] CONT, R., «Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments», en *Mathematical Finance*, Vol.16, issue 3, June 15, 2006.
- [10] FISHER, M., *Contributions to the Method of Entropy Calibration in Financial Modelling*, New York University, Department of Mathematics, 2003.

- [11] PERAITA EZCURRA, O., *Valoración de activos financieros por entropía máxima con programación lineal*, tesis doctoral, UCM, 2017.
- [12] SERNA, G., «La sonrisa de la volatilidad en los mercados de opciones», en *BME Bolsas y Mercados Españoles*, pp. 34-37.
- [13] SERNA, G., «Valoración de opciones con sonrisas de volatilidad: aplicación al mercado español de opciones sobre el futuro del índice IBEX-35», en *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, pp. 1203-1227.
- [14] VILLANUEVA DÍEZ, I., *Fundamentos de Matemáticas Financieras*, UCM, 2017.